

ÉTUDES

SUR

LES MACHINES,

D'APRÈS

L'EXPÉRIENCE ET LE RAISONNEMENT.



METZ, DE L'IMPRIMERIE DE S. LAMORT.

ÉTUDES

SUR

LES MACHINES,

D'APRÈS

L'EXPÉRIENCE ET LE RAISONNEMENT;

PAR

L. M. P. COSTE,

CAPITAINE D'ARTILLERIE ET ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Il ne faut rien admettre que ce qui est avoué par la raison et confirmé par l'expérience.

DESCARTES.



A PARIS,

CHEZ ANSELIN, RUE DAUPHINE, N°. 9.

A METZ,

CHEZ THIEL, PLACE ST.-JACQUES.

1828.

PRÉFACE.

Monsieur le Colonel Evain, Directeur de l'artillerie à Metz, cherchant, autant que possible, à favoriser l'instruction des officiers sous ses ordres, en la faisant tourner au profit du gouvernement, chargea, l'année dernière, une commission composée de Messieurs les capitaines d'artillerie Maynard, Munier et moi, de lui présenter un projet d'amélioration pour les usines de l'arsenal de Metz. Après avoir médité, avec soin, la théorie des machines, la commission fit une suite d'expériences qui sont, en grande partie, celles que nous présentons aujourd'hui.

Nous devons remercier encore, avant tout, Monsieur le Lieutenant-Colonel Guidonnet, Sous-Directeur de l'arsenal de Metz, pour les facilités qu'il nous a accordées dans la continuation de nos recherches; et nos collègues Maynard et Munier qui nous ont permis de disposer des expériences que nous avions faites ensemble, et qui nous ont aidé, plusieurs fois, de leurs lumières et de leurs conseils.

L'amour du bien public et le devoir imposé à chaque personne de communiquer le fruit de ses veilles et de ses méditations,

toutes les fois qu'il peut être utile aux progrès et à l'instruction de la société, ont toujours été jusqu'ici les seules raisons qui nous ont engagé à prendre la plume; et ce sont encore les seules qui nous décident aujourd'hui, à risquer notre repos, en provoquant des discussions sur la théorie des machines: sujet très-important, traité déjà bien des fois, par des personnes d'un très-grand mérite; mais qui est, en quelques points, résolu d'une manière inexacte, et laisse beaucoup à désirer. La facilité que les grands génies possèdent pour coordonner leurs idées, et présenter, sous le jour le plus favorable, et le plus entraînant, les hypothèses qu'ils ont imaginées ou qu'ils ont adoptées, les empêche quelquefois de bien examiner les bases de leur édifice et de vérifier soigneusement si elles sont conformes aux règles d'une saine logique. Ils prennent aussi quelquefois le fruit de leurs méditations, pour l'œuvre de la nature; et ils oublient trop souvent que dans les sciences : Il ne faut rien admettre que ce qui est avoué par la raison et confirmé par l'expérience. *Fameuse règle de Descartes qui, en détrônant le péripatétisme, a marqué une ère nouvelle dans l'histoire de l'esprit humain, et est devenue le fondement de toutes nos connaissances.*

Ce reproche a été mérité sur-tout par les mathématiciens. Le désir, très-louable au fond, de soumettre au calcul, toutes les forces, et tous les objets de la nature; et l'envie de faire briller leur talent et leur adresse à manier toutes les parties et toutes les ressources de l'analyse ne les empêchent que trop souvent de bien faire attention aux hypothèses sur lesquelles ils se fondent pour mettre les problèmes en équation, et pour déterminer les constantes; et ils sacrifient même quelquefois certaines circonstances et certains détails qui, contre leurs opinions, sont très-importans et ne peuvent pas être négligés.

Il faut avouer que nombre de personnes et sur-tout les jeunes gens se laissent séduire et éblouir par l'apparence de rigueur que présente un gros mémoire et une longue suite de calculs, et qu'ils croient plutôt sur parole qu'ils n'examinent par eux-mêmes. Les industriels, soit parce qu'ils ne possèdent pas les connaissances nécessaires pour appliquer les formules des théoriciens, soit parce qu'ils n'en ont pas le temps et la volonté, soit parce qu'ils ont reconnu de grandes différences entres les principes déduits des formules et ceux conclus de l'expérience, les industriels, dis-je, regardent malheureusement la théorie comme une pure curiosité qui ne peut conduire dans la pratique qu'à de grandes erreurs. Ils préfèrent marcher en aveugles ou se servir de quelques règles qu'ils se sont créées d'après leur pratique. Si d'un côté les personnes instruites doivent chercher à guérir les industriels de leurs injustes préventions contre la théorie; d'un autre côté, les théoriciens doivent consulter plus souvent l'expérience, la raison et les principes d'une saine logique; ils doivent sacrifier l'ambition de montrer leur supériorité pour surmonter toutes les difficultés de l'analyse au désir de se rendre accessibles à toutes les personnes, et de présenter des méthodes pratiques de la plus grande simplicité; ils doivent avouer leur ignorance, quand ils sont arrêtés par des difficultés insurmontables, plutôt que de chercher à donner des explications avec trop de légèreté; ils doivent encore présenter toutes les raisons pour et contre, et publier le degré de probabilité que méritent les expériences et la théorie.

Ces principes nous ont constamment guidé dans notre travail qui se compose en grande partie de la question des frottemens : sujet dont on a reconnu depuis long-temps l'importance, puisqu'il y a des machines qui n'utilisent pour le travail que le tiers

ou le quart de la puissance motrice, et que même dans certaines machines telles que celle de Marly, ce rapport est beaucoup plus faible et est à peine un cinquantième. En cherchant à connaître le dégré d'exactitude de nos expériences, nous les avons multipliées, et nous nous sommes convaincu que la théorie des frottemens, reçue jusqu'ici, était erronée en plusieurs points, et péchait sur-tout en ce qu'elle faisait varier la force consommée par les frottemens, en raison de la simple vîtesse au lieu du carré de la vîtesse.

Borda, en donnant la véritable théorie des roues à aubes, avait bien dit que celle de Parent était fausse; mais ses raisons sont si peu claires et si peu concluantes, que M. Navier, dans son commentaire sur Bélidor, prétend que l'on doit se servir de celle de Borda, dans le cas d'une roue à aubes mue dans un coursier, et de celle de Parent dans celui d'une roue à aubes mue dans un courant indéfini; c'est cette dernière distinction qui nous a engagé à présenter la formule de Borda, sous un point de vue nouveau, qui fait bien voir qu'elle a lieu également dans les deux cas, et que la différence ne consiste guère que dans la manière d'évaluer la force motrice dépensée.

L'instrument, connu sous le nom de frein de M. de Prony, et servant à faire des expériences sur la force des moteurs, est si récent qu'il a été peu employé jusqu'ici; et que nous avons cru rendre service en indiquant d'abord la manière dont on devait l'employer pour faire les expériences; et en donnant ensuite une méthode de rectification et de substitution successives, pour trouver non-seulement la force indiquée directement par le frein, mais encore la totalité de la force, transmise au récepteur, qui comprend la force consommée par le frottement de ce récepteur. Nous avons encore accompagné les méthodes relatives à l'usage

du frein, de plusieurs autres méthodes qui peuvent être utiles pour faire des expériences sur les différentes roues à aubes que l'on peut rencontrer dans les différentes usines. Les expériences que nous donnons ensuite sur la scierie établie dans l'arsenal de Metz, viennent appuyer nos considérations précédentes, et ont été pour nous l'occasion de résumer plusieurs données générales sur les scieries et le sciage qui peuvent être utiles à ceux qui dirigent de pareilles machines.

Nous avons terminé notre opuscule par la détermination de la vitesse de roue qui donne le maximum de force utilisée par le travail. Si la force consommée par les frottemens croissait comme la simple vitesse, ainsi que la force consommée par le travail, et que la machine n'éprouvât aucun à-coup capable de lui faire perdre une force vive sensible, la vitesse qui donnerait le maximum de force utilisée par le travail serait bien celle qui donne le maximum de force utilisée par le récepteur; mais comme la force consommée par les frottemens croît comme le carré de la vitesse, tandis que celle utilisée par le travail, ne croît que comme la simple vitesse; la vitesse de roue qui donnera le maximum de force utilisée par le travail, sera moindre que celle déterminée par le maximum, et sera d'autant moindre que la force consommée par les frottemens augmentera relativement à celle consommée par le travail. Nous n'avons pas cherché pour résoudre cette question, à faire usage de toutes les ressources de l'analyse, nous avons préféré présenter une méthode de simple tâtonnement, mais qui peut être mise facilement en pratique par tout homme qui connaît les premiers principes des mathématiques; ce qui suffit pour montrer la route que l'on peut suivre dans d'autres questions analogues. C'est ainsi que nous avons toujours cherché à nous mettre à la portée de tous nos lecteurs, et à donner à toutes les

personnes engagées dans l'industrie, les moyens de résoudre, avec les principes élémentaires des mathématiques, les différentes questions qu'ils pourront se proposer sur les sujets traités dans cet opuscule.

Si nous nous sommes permis de citer certaines personnes préférablement à d'autres, ce n'est par aucun motif de jalousie ou de haine personnelle, c'est à cause de l'estime méritée que nous professons pour elles, et de la juste célébrité que le public leur a décernée. En agissant ainsi, nous avons cherché à éviter le reproche que l'on aurait pu nous adresser, de ne faire tomber notre critique que sur des auteurs peu connus, et qui étaient par conséquent déjà appréciés à leur juste valeur.

ÉTUDES

SUR

LES MACHINES,

D'APRÈS L'EXPÉRIENCE ET LE RAISONNEMENT.

DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES.

1. Afin d'éviter la confusion des idées et de les exposer plus clairement, nous avons trouvé bon et indispensable de bien définir, avant de commencer à entrer en matière, non-seulement la valeur des mots dont nous nous servons, mais encore quelques principes fondamentaux. On sait que les mathématiques étant des sciences de rapport, on ne peut comparer entre elles que des quantités homogènes ou semblables, ou ayant des propriétés communes. Un principe tout aussi important, mais qui n'est qu'une conséquence du premier, c'est qu'on ne peut comparer zéro qui n'est rien avec une quantité quelconque, quelque petite qu'elle soit, ou bien une quantité infinie avec une quantité finie, quelque grande qu'elle soit. Ainsi, d'après ce dernier principe, il est absurde de vouloir comparer un corps en repos avec un corps en mouvement, un corps ne jouissant d'aucune vitesse avec un corps doué de vitesse, en un mot une pression avec un choc; c'est pécher contre tous les principes de l'homogénéité et de la similitude, que de dire, comme quelques-uns de nos grands géomètres:

qu'un choc est une somme de pressions; et c'est excuser par là ceux qui, tels que Rondelet, ont voulu comparer l'effet de la force de pression à l'effet de la force de choc. Quoiqu'un poids jouissant d'une certaine vîtesse, puisse faire sur un corps, par exemple, l'effet d'une pression de trois kilogrammes, et que ce même poids, doué de la même vîtesse, puisse produire sur un autre corps une pression double, il serait très-intéressant pour les arts de connaître ces rapports sur les différentes matières employées journellement aux différens usages de la vie, mais il ne faudrait pas en vouloir conclure la moindre chose contre la proposition que nous avons émise auparavant.

2. La pesanteur est une pression qu'un corps exerce sur un autre corps placé au-dessous de lui. Cette pression dont l'intensité déterminée s'appelle le *poids* du corps, peut être mesurée très-exactement au moyen des balances; elle est invariable dans le vide, quelques changemens qui puissent s'opérer dans la forme, la position, l'extension et les propriétés chimiques du corps, pourvu cependant qu'aucune matière pondérable ne lui soit ni enlevée, ni ajoutée. Le poids d'un corps ne dépend que de la quantité de matière qu'il contient, il est donc proportionnel à la *masse* qui n'est que cette dernière quantité de matière. Pendant long-temps c'était la véritable signification du mot *masse*, et on affectait la dénomination de *poids*, pour désigner particulièrement les résultats des pesées, dans l'air plus ou moins dense. Et la question si une livre de fer pèse plus qu'une livre de coton, n'est pas dépourvue de bon sens, si l'on veut comparer les pesées faites dans le vide avec celles faites dans l'air.

3. Les géomètres modernes qui se sont occupés de mécanique ont fait signifier au mot *masse*, une chose qui, sous certains rapports, est assez différente. Ayant remarqué que la masse et le poids, pris dans l'acception précédente, variaient avec l'intensité de la pesan-

teur, c'est-à-dire avec la distance de ce corps au centre de la terre, et que pourtant le nombre des molécules ou d'atomes pondérables ne variait pas et restait toujours le même, ils sont convenus de nommer *poids absolu* le poids d'un corps pesé dans le vide, et de désigner par le mot *masse* le poids d'un corps divisé par l'intensité de la pesanteur au lieu où a été effectuée la pesée de ce même corps; et comme le poids absolu d'un corps est en raison directe de l'intensité de la pesanteur, on est arrivé par là à exprimer par le mot *masse* une quantité constante et indépendante des différens lieux où l'on a pu faire la pesée (*a*).

4. Cette dernière signification qui est de pure convention est celle que nous adopterons; et nous prions le lecteur de bien faire attention que, quoique nous ayons, en désignant par M la masse, par g la gravité et par P le poids absolu, Mg égale P, nous ne voulons pas dire que P soit une somme d'espaces parcourus ou une somme de vîtesses; ni comparer le moins du monde une pression

(*a*) Il est bon de faire voir en quoi notre définition du mot masse diffère de celle des autres mécaniciens. Suivant M. Navier, « Tout corps qui cède librement à l'action de la pesanteur, prend un même mouvement uniformément accéléré; et si divers corps sont retenus par des obstacles, ils exercent contre eux, par l'action de la pesanteur, des efforts ou pressions qui sont proportionnels à leurs *masses*, c'est-à-dire à la quantité de matière qu'ils contiennent. Ces pressions ne sont autre chose que ce qu'on nomme ordinairement le *poids* du corps. »

« Soit g l'accroissement constant que reçoit dans chaque unité de temps, la vitesse de tout corps qui cède librement à la pesanteur: g sera une quantité propre à caractériser cette force et à en donner la mesure. Soit P le poids d'un corps dont la masse est m, le rapport du poids à la masse ou $\frac{P}{m}$ sera évidemment aussi une quantité propre à donner la mesure de la pesanteur. Mais deux quantités qui donnent la mesure d'une même cause, sont nécessairement égales, ou du moins proportionnelles entre elles. On peut donc écrire $\frac{P}{m} = g$ ou $P = mg$, pourvu qu'ayant exprimé P et g d'après les unités ordinaires de poids et de longueur, on fixe l'unité de masse, laquelle est absolument arbitraire, de manière à satisfaire à cette équation. » Nous laissons au lecteur à faire le rapprochement entre cette définition et la nôtre.

avec un choc, et que nous persistons toujours à croire qu'il est impossible et absurde qu'une telle comparaison puisse être faite généralement.

5. Il faut distinguer encore le *poids absolu* d'un corps du poids de ce même corps, parce que pour obtenir ce dernier, la pesée peut être faite dans l'air ou dans différens fluides. Le *poids absolu* est encore différent du *poids spécifique*, ou de la *densité* qui est le rapport du poids absolu d'un corps, sous un certain volume, au poids absolu d'un autre corps sous le même volume. On observera encore que la densité est indépendante de la gravité ou de la pesanteur, et qu'elle exprime aussi le rapport de la masse d'un corps, sous un certain volume, à la masse d'un autre corps sous le même volume.

6. Lorsqu'un corps tombe dans le vide d'une certaine hauteur, sa vîtesse d'abord nulle, s'accélère et s'accroît de plus en plus. h désignant la hauteur, g l'espace parcouru par un corps dans la première seconde de sa chute, et v étant la vîtesse à la fin de cette chute, on a la relation

$$v = \sqrt{2gh}.$$

L'espace, parcouru dans ce cas-ci, est bien différent de celui parcouru d'un mouvement uniforme, parce que celui-ci n'est que proportionnel à la vîtesse, tandis que l'autre est proportionnel au carré de la vîtesse acquise à la fin de la course. Ainsi, dans les machines, il faut bien faire attention à la manière dont les espaces, que l'on considère, ont été parcourus par la résistance ou les moteurs, et ne pas les confondre ensemble, pour éviter de pécher contre le principe fondamental des mathématiques, celui de l'homogénéité ou de la similitude. C'est aussi par cette dernière raison que nous emploierons l'expression de *quantité de mouvement*, pour exprimer le produit du poids absolu par la vîtesse, et d'après

Coulomb et M. Navier, celle de *quantité d'action*, pour désigner le produit du poids par la hauteur parcourue en tombant.

Nous ajouterons encore que les géomètres sont convenus d'appeler *force vive* le produit de la masse par le carré de la vitesse; et de cette manière la force vive se trouve être le double de la quantité d'action.

7. Nous conserverons le mot générique *force*, pour désigner un produit quelconque du poids ou de la masse par la vitesse, en observant pourtant de ne considérer ensemble et de ne mettre en rapport que des forces de même espèce.

8. Ainsi, pour qu'une quantité de mouvement devienne une quantité d'action, il faut la multiplier par la vitesse, et la diviser par $2g$ qui représente le double de l'espace parcouru dans la première seconde de sa chute, par un corps tombant dans le vide.

De la manière de considérer le poids qui sert à mettre une machine en mouvement.

9. Quand un treuil est mis en mouvement par un fluide, et employé à soulever un poids, si, au sortir de l'état du repos, on observe les vitesses acquises pendant des intervalles de temps égaux mais successifs, on remarquera que les différences des vitesses entre elles, d'abord très-grandes, deviennent de plus en plus petites, à mesure que le mouvement de la machine se régularise et s'approche de plus en plus de devenir uniforme. Quoique ce ne soit qu'au bout d'un temps infini que l'on peut obtenir rigoureusement l'uniformité, il arrive pourtant, presque toujours, à cause de la grande prépondérance de la puissance sur les résistances, que l'on parvient au bout d'un petit nombre de révolutions à une vitesse qui s'approche beaucoup de la vitesse limite. Ce phénomène est analogue à celui qui a lieu pour les parachutes; l'écoulement des fluides à travers

des orifices, etc.; et on peut, comme M. Poncelet, capitaine du génie, le démontrer généralement sans calcul, en se fondant sur la loi de continuité : « Il suffit, pour cela, de prendre pour abscisses les temps successifs, et pour ordonnées les vîtesses d'un point quelconque du système, et de former une courbe continue qui ne peut jamais devenir rigoureusement parallèle à l'axe des abscisses, ou dégénérer en ligne droite, puisqu'elle changerait de nature ; mais qui peut fort bien avoir cette parallèle pour asymptote, et en approcher d'une manière très-rapide, à partir de l'origine qui répond à l'instant du départ du système. »

10. Lorsque le mouvement peut être considéré comme parvenu à l'uniformité, le poids soulevé, multiplié par la vîtesse qu'il a acquise ou par l'espace qu'il a parcouru dans une seconde, est dans un certain rapport avec le poids de l'eau motrice dépensée dans le même temps, multiplié par la hauteur qui peut être censée avoir produit la vîtesse de cette même eau motrice. L'expérience et la théorie prouvent que ce rapport est constant dans la plupart des roues hydrauliques en usage, toutes les fois que le rapport de la vîtesse de la roue à la vîtesse de l'eau motrice est aussi constant. Si, comme on le pense généralement, le poids soulevé n'exprimait et ne mesurait qu'une simple pression, comme quand on pèse un corps dans une balance, on se trouverait amené à comparer une quantité de mouvement à une quantité d'action, ce qui est aussi absurde que de vouloir mesurer un choc ou l'effet d'un choc par une pression. Pour satisfaire au principe de l'homogénéité, principe fondamental de toute science mathématique, il faut donc considérer le poids soulevé comme exprimant la mesure d'une quantité de mouvement divisée par le double de g, coéfficient de la gravité, ou comme mesurant déjà la moitié du produit de la masse du poids par la vîtesse de ce même poids.

11. Ainsi en multipliant cette dernière espèce de force par la

vitesse, on a une quantité d'action qui peut être mise en rapport ou en relation avec la quantité d'action développée par l'eau motrice. Cette considération fait disparaître l'absurdité de comparer et de mesurer un espace parcouru d'un mouvement uniformément accéléré avec un espace parcouru d'un mouvement uniforme.

12. En supposant, que la résistance au mouvement, de la part d'une machine quelconque, soit représentée en totalité par un poids P suspendu au moyen d'une corde enroulée autour d'un arbre, la quantité d'action acquise par le récepteur, ayant une vitesse uniforme v, sera exprimée par Pv, et l'une de ces deux quantités ne pourra croître sans que l'autre ne diminue.

13. Si on laisse l'ouverture de la vanne toujours la même, avec une résistance très-grande, quand le mouvement sera parvenu à l'uniformité, la vitesse de la machine sera très-petite et la quantité d'action acquise par le récepteur sera aussi très-faible. Avec une moindre résistance, la vitesse, lors du mouvement uniforme, sera plus considérable, et la quantité d'action acquise sera aussi augmentée. En diminuant de plus en plus la résistance, la quantité d'action acquise par le récepteur s'accroîtra de plus en plus, jusqu'à un certain terme, avec la vitesse uniforme. Mais, passé ce terme, quoique la vitesse uniforme augmente continuellement, la quantité d'action acquise par le récepteur diminuera de plus en plus; et elle finira par être presque nulle, quand la vitesse, lors du mouvement uniforme, sera très-grande. Le point, où se trouve ce maximum de force acquise, a été trouvé pour les récepteurs dans beaucoup de cas; et c'est lui qui fixe ordinairement, dans les usines, la vitesse avec laquelle on fait mouvoir les machines.

14. Quoique l'effort reçu par le récepteur varie avec la vitesse de la machine, on peut toujours, par expérience ou par théorie, déterminer la manière dont se fait cette variation, et fixer, pour une vitesse quelconque, de combien l'effort reçu diffère de l'effort

maximum. Ainsi, de l'effort maximum, on peut déduire l'effort reçu par la machine, dans chaque cas particulier; et c'est cet effort reçu que nous appellerons *effort réduit*, *force réduite* ou *quantité d'action réduite*.

La force consommée par le frottement croît généralement comme le carré *de la vitesse.*

15. Nous avons vu la manière dont il fallait considérer un poids soulevé, au moyen d'un treuil, par une roue hydraulique mue dans un coursier; pour nous faire mieux comprendre et ne laisser aucun doute dans l'esprit, substituons à la résistance du poids celle d'un système d'engrenages à poids constant : par le principe de l'homogénéité, la force développée par le moteur étant une force vive ou une quantité d'action, il faut que la force reçue par le récepteur ou la roue hydraulique, soit aussi une force vive ou une quantité d'action. Quand, l'ouverture de la vanne restant la même, la hauteur de l'eau varie, l'effort fait par le moteur varie aussi comme cette hauteur, ou comme le carré de la vitesse acquise par l'eau en tombant de cette même hauteur. Pour que la force réduite transmise au récepteur et la force dépensée par le moteur restent en relation, il faut qu'elles soient d'abord de la même espèce; et, puisque la force motrice est une quantité d'action, la force transmise doit être aussi une quantité d'action; et, la première variant, la seconde doit varier aussi d'une manière analogue; cette variation ne pouvant d'ailleurs influer que sur la vitesse du récepteur, et la force motrice suivant la loi des carrés de la vitesse du courant, la force réduite et communiquée au récepteur doit suivre aussi la loi du carré de la vitesse reçue; en un mot la force consommée par le frottement et qui sert à entretenir, en mouvement, un système d'engrenages à poids constant, doit croître comme le carré de la vitesse communiquée (10, 11).

16. Cette vérité est encore plus sensible, lorsque l'on suppose un treuil mu toujours par une roue hydraulique, et portant sur son arbre, au lieu d'une poulie pour soulever un poids, deux bras qui soutiennent des surfaces assez considérables pour présenter, à l'air, une résistance capable de ralentir et de diminuer la vîtesse. Si le treuil est sans pesanteur, il est évident, que, lorsque le mouvement est devenu uniforme, la résistance de l'air contre les surfaces planes est en rapport avec la force motrice; et comme ici la résistance de l'air est proportionnelle au carré de la vîtesse de la surface, la loi ci-dessus se trouve entièrement confirmée.

17. Si, dans ce dernier treuil, après avoir supprimé la roue hydraulique, on remplace son action par un poids suspendu à une corde enroulée sur l'arbre, et, qu'on laisse tout le reste dans le même état; quand le mouvement sera parvenu à l'uniformité, on aura toujours d'un côté la résistance de l'air, qui sera comme le carré de la vîtesse, et de l'autre côté, un poids descendant d'un mouvement uniforme, et servant à remplacer une force accélératrice; donc, pour être conséquent et observer la loi de l'homogénéité, il faudra, comme nous l'avons fait, considérer ce poids comme exprimant une quantité de mouvement divisée par le double de la gravité.

18. La différence entre la résistance du poids suspendu, à une corde, s'enroulant sur un treuil, et la résistance du poids de ce même treuil, consiste en ce que le premier, pouvant faire naître le mouvement par lui-même, s'aide de l'action continuelle de la gravité ou de la pesanteur, pour résister à la force du moteur; tandis que le second, pour s'opposer au même effort, n'a que son poids qui ne peut lui faire acquérir par lui-même aucun mouvement.

19. Ainsi, si la force consommée, par un poids suspendu à une corde s'enroulant sur un treuil, croît comme la simple vîtesse, celle consommée par le frottement du treuil, ou par la résistance prove-

nant d'un système d'engrenages, croîtra comme les carrés des vitesses des centres d'impulsion. Dans beaucoup de machines, comme nous le verrons par la suite, la force consommée par le travail varie de même, comme la simple vitesse, et non comme le carré de la vitesse; et c'est ce qui nous a engagé à consacrer l'expression: *coéfficient d'homogénéité*, pour désigner la force consommée, divisée par la vitesse ou le carré de la vitesse, selon que cette force consommée croît comme la simple vitesse ou comme le carré de la vitesse.

20. Supposons à présent, que l'eau qui met en mouvement la roue hydraulique, acquierre une vitesse qui soit le double de celle qui existait auparavant; et que l'on règle le mouvement du récepteur de manière que le rapport de sa vitesse, à celle de l'eau motrice, reste constant. La force motrice dépensée sera quadruple de la première, et la force acquise, par le récepteur, représentée par le poids soulevé, devra être aussi quadruple, ce qui s'effectuera au moyen d'un poids double du premier et animé de la vitesse double que la machine vient d'acquérir. Et, en généralisant ce raisonnement, on voit que les vitesses des poids moteurs, croîtront dans les mêmes rapports que ces mêmes poids. Ce que Sméaton a vérifié par expérience, dans son examen expérimental de la quantité et de la proportion de la puissance mécanique nécessaire, pour imprimer différens degrés de vitesse, aux corps graves passant du repos au mouvement; et ce qui découle tout naturellement aussi de la proposition que nous avons énoncée (10, 17, 18), que le poids soulevé, au moyen d'une corde qui s'enroule sur une poulie, n'exprimait pas une simple pression, mais une quantité de mouvement divisée par le double de la gravité ou par $2g$.

21. Une partie de la force transmise au récepteur, et qui sert à entretenir le mouvement de la machine, est consommée par les frottemens qui croissent comme le carré de la vitesse, et non comme la simple vitesse, suivant l'opinion généralement reçue par la plu-

part des mécaniciens et des théoriciens, et qui se trouve consignée dans les traités de mécanique les plus répandus et les plus estimés. Ce dissentiment nous a engagé, à faire voir d'abord, comment les expériences, que Coulomb a faites directement pour connaître la loi des frottemens, prouvent notre proposition; et à nous étendre en suite sur certains points, qui ne se trouvent pas compris ordinairement dans tous les traités de mécanique, et qui peuvent éclairer nos lecteurs, et leur ôter quelques nuages et quelques doutes, qui pourraient leur rester, sur les propositions que nous venons de leur développer. Des idées, en opposition avec celles généralement reçues, ne sauraient être présentées, sous trop de points de vue différens, pour prévenir toutes les objections que l'on pourrait élever.

Expériences de Coulomb sur les frottemens.

22. Avant de rapporter les expériences de Coulomb, nous remarquerons que tous les corps, lorsqu'on les met en contact, ont une tendance à s'attacher les uns aux autres, à moins que le contact ne soit très-imparfait, ou que le poids du corps ne rende cet effet insensible. Cette propriété se nomme *adhésion*. Elle se distingue de la cohésion, parce qu'elle s'exerce sur les corps hétérogènes aussi bien que sur les corps homogènes, tandis que la cohésion proprement dite n'a lieu qu'entre des corps homogènes. L'attraction, qui existe entre deux corps hétérogènes, se nomme proprement *affinité*. L'adhésion n'est donc pas une force particulière, mais elle est ou, une cohésion faible, ou, une faible affinité. Pendant le repos, elle croît avec le temps jusqu'à un certain terme, et suit des lois différentes de celle du frottement. La confusion de l'adhésion et du frottement a retardé, pendant long-temps, la connaissance des phénomènes et la détermination de leur valeur absolue.

23. Coulomb s'était servi, dans ses expériences, d'une poulie de bois de gayac, de 12 pouces de diamètre, et dont l'axe de fer,

de 19 lignes de diamètre, était fixé (Fig. 1) sur deux madriers de bois BB, portés sur une espèce de chevalet. La poulie était mobile autour de l'axe de fer, n'avait qu'une ligne trois quarts de jeu, et était revêtue intérieurement d'une boite de cuivre. Tout le système ne pesait que 14 livres, et on avait fait disparaître les irrégularités par le mouvement. Les poids n'avaient qu'une course de 6 pieds.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

24. La ficelle, de 3 lignes de circonférence, à la quelle Coulomb avait attaché un poids de 103 livres, de chaque côté de la poulie, nécessitait un petit contre-poids *p* de 6 livres, pour produire un mouvement lent et irrégulier.

DEUXIÈME EXPÉRIENCE.

La corde était composée de 6 fils de carret, et chargée de 200 livres, de chaque côté de la poulie.

1er. Essai. Dix livres 5 dixièmes, placées à un côté quelconque, ne donnaient qu'un mouvement lent et irrégulier.

2me. Essai. Avec un poids de 13 livres et demie, les 3 premiers pieds étaient parcourus en 6 secondes, et, les 3 autres en 3 secondes.

TROISIÈME EXPÉRIENCE.

C'était la même corde que la précédente, mais elle était chargée de 400 livres de chaque côté.

1er. Essai. Vingt-une livres ne donnaient qu'un mouvement lent et irrégulier.

2me. Essai. Avec 28 livres, les 3 premiers pieds étaient parcourus en 5 secondes et demie, et, les 3 autres en 2 secondes et demie.

3me. Essai. Avec 39 livres, les 3 premiers pieds étaient parcourus en 3 secondes, et, les trois suivans en une seconde et demie.

CONCLUSIONS À DÉDUIRE DE CES EXPÉRIENCES.

25. Nous allons d'abord chercher, d'après Coulomb, à calculer quelle est la force nécessaire et suffisante pour sortir la poulie de l'état de repos, et lui communiquer un mouvement très-lent, et qui, par conséquent, ne peut être qu'irrégulier. Dans tous ces calculs, au lieu du diamètre de l'axe, il faut prendre le diamètre de la boîte qui est de 20,75 lignes. Ainsi, pour ramener le frottement, qui a lieu entre l'axe et la boîte, à une force équivalente appliquée à la circonférence de la poulie, on peut se servir, avec une approximation assez grande, dans la première expérience, du rapport de 1 à 7, et, dans les deux autres, de celui de 1 à 7,2.

Dans la première expérience, le poids moteur de 6 livres supposé appliqué à l'axe, devient donc équivalent à 42 livres, et donne, pour le rapport de la pression au frottement,

$$\frac{206 + 14 + 6}{42} \text{ ou } \ldots\ldots\ldots\ldots\ 5{,}4.$$

Dans le premier essai de la deuxième expérience, sur 10 livres et demie composant le poids moteur, une livre et demie est consommée par la tension de la corde de 4 lignes de diamètre, et il ne reste, que 9 livres, pour produire la force motrice. Ce poids moteur rapporté à l'axe devient équivalent à 65 livres, et donne, pour le rapport de la pression au frottement,

$$\frac{400 + 14 + 10}{65} \text{ ou } \ldots\ldots\ldots\ldots\ 6{,}5.$$

Dans le premier essai de la troisième expérience, la tension de la corde consomme une force de 3 livres, et on trouve, pour le rapport de la pression au frottement,

$$\frac{800 + 14 + 21}{130} \text{ ou } \ldots\ldots\ldots\ldots\ 6{,}4.$$

26. Malgré quelques petites inégalités, ces trois expériences prouvent, que, pour sortir une poulie de l'état du repos et lui donner un mouvement lent et presque insensible, il suffit d'employer un poids moteur proportionnel à la pression.

27. Après avoir vu ce qui se passe, lorsque le mouvement est lent et irrégulier, il ne reste plus qu'à examiner ce que devient le frottement lorsque la poulie est animée d'une certaine vitesse.

D'après le deuxième et le troisième essai de chaque expérience, où les trois premiers pieds de la chute étaient toujours parcourus dans un temps à peu près double de celui employé à parcourir les trois derniers, Coulomb remarque, que cela annonce une vitesse accélérée et une force accélératrice constante, et qu'ainsi le frottement est une force accélératice constante semblable à celle de la pesanteur.

28. Pour le confirmer, supposons un rouleau C (Fig. 2) mis en mouvement, par le poids P, dans l'intérieur de la boîte AB; quand le rouleau est en repos, son arête inférieure repose sur la partie la plus basse de la boîte; mais, quand il est en mouvement, son arête de contact se trouve sur tout autre point B de la boîte, disposé de telle façon que la tangente de contact BD, fait, avec l'horizontale BE, un angle EBD déterminé par le rapport du frottement à la pression. Dans cette situation, le rouleau, à cause de son poids, est sollicité continuellement par l'action de la pesanteur à venir reprendre sa station de repos en A, et n'est maintenu, dans sa position momentanée, que par l'action contraire et continuelle du poids moteur. La pression agit donc, comme un contre-poids, pour diminuer et détruire l'action du poids moteur P. Désignons à présent, par D, un poids tel, que P — D soit égal à la quantité absolue du frottement, par E, l'espace, qu'a parcouru le poids moteur P, pendant le temps t, par h, la hauteur de la chute des corps graves, dans le vide, pendant le même temps t, et enfin, par M la pression totale exercée sur l'axe.

Le poids D doit être considéré comme s'il agissait dans le vide: sa quantité d'action sera donc égale à hD, et équivalente à la quantité d'action ME de la pression totale. Ce qui donnera l'équation

$$hD = ME,$$

mettant pour h sa valeur $\frac{gt^2}{2}$, cette équation deviendra

$$D = \frac{2ME}{gt^2}$$

dans laquelle, D représente la force constante qui produit l'accélération de la chute, E la chute totale qui est de 6 pieds, M la totalité des poids mis en mouvement, qu'il faut augmenter de 14 livres à cause du poids de la poulie qui a un pied de diamètre; g est la force de la gravité qui se trouve, à peu près, égale à 30 pieds, et t le temps observé et employé par le poids moteur à parcourir les 6 pieds.

29. Deuxième expérience, deuxième essai. D égale 2 livres; ainsi, il reste 11 livres et demie pour la résistance due à la roideur de la corde et au frottement, au lieu de 10 livres que l'on avait pour une vitesse insensible dans le premier essai de cette même expérience.

Troisième expérience, deuxième essai. D égale 5,1 livres; la force employée est de 28 livres; et il reste 22,7 livres, au lieu de 21 livres données dans le premier essai.

Troisième expérience, troisième essai. D égale 16,1 livres; la force employée est de 39 livres, et il reste 22,9 livres au lieu de 21 livres données par le premier essai.

30. Il résulte évidemment de ces différens essais, que la vitesse n'influe, que d'une manière insensible, sur le coéfficient des frottemens. Ce coéfficient est de 22 livres d'après une moyenne prise sur les trois essais de la troisième expérience, et son rapport re-

lativement à la pression est de 1 à 6,1. C'est aux rapports déduits de cette manière que nous affecterons spécialement la dénomination du *coéfficient du frottement*, au lieu de celle du *rapport du frottement à la pression*, dont se sert Coulomb, qui est assez différente de la précédente, et qui a pu contribuer à induire en erreur la plupart de ceux qui se sont occupés du frottement d'après lui.

31. Lorsqu'un corps se meut verticalement dans le vide, sa vitesse s'accroît de plus en plus, et les espaces parcourus sont comme les carrés des temps. Si l'on compare entre eux les espaces parcourus en temps égaux, on verra que ces espaces peuvent être exprimés par une progression arithmétique. Mais ces lois n'ont plus lieu, lorsque le corps se meut au milieu d'un fluide, et si l'on considère les espaces parcourus successivement pendant le même temps : on remarquera que leurs différences, au lieu d'être constantes, comme dans le premier cas, diminuent de plus en plus et finissent par devenir zéro ; dans cet instant, le mouvement devient uniforme, c'est-à-dire, que le corps parcourt des espaces égaux, en temps égaux ; et que la résistance du fluide se trouve proportionnelle au carré de la vitesse, et, égale à la quantité d'action dépensée pour entretenir le corps en mouvement.

Supposons à présent que le même poids est attaché à une corde qui s'enroule sur un treuil, on observera encore ici, comme dans le cas précédent, que les différences des espaces, parcourus dans le même temps, diminueront de plus en plus et que le mouvement finira par devenir uniforme. Alors faisant abstraction de la résistance de l'air qui, dans ce cas, est très-petite, à cause du peu de vitesse nécessaire pour obtenir l'uniformité, on aura la quantité d'action du poids en mouvement, égale à la résistance du frottement, qui est une fonction de la pression et de la vitesse. Nous savons déjà, d'un côté, que le coéfficient du frottement est une force accélératrice constante,

semblable à la pesanteur; et, de l'autre côté, que l'impulsion d'un fluide en mouvement, contre un corps, est aussi une force, analogue à la pesanteur, qui produirait sur le corps, qu'elle sollicite au mouvement, exactement les mêmes effets que la pesanteur, si elle était équivalente au poids de ce corps. Ainsi, à cause de l'analogie du frottement et de la résistance d'un fluide, dans le cas où le poids sert à mouvoir le treuil, la résistance qui, lors de l'uniformité, fait équilibre à la quantité d'action du poids, doit être proportionnelle au produit de la pression par le carré de la vitesse, parce qu'ici la pression est une quantité constante, et qu'il n'y a de variable que la vitesse.

32. On voit, de cette manière, la conformité des expériences de Coulomb, avec la théorie de Ferdinand Berthoud, que nous avons adoptée. Les expériences sur les axes et sur la roideur des cordes, confirment les mêmes résultats. Si Coulomb a cru apercevoir quelque petite variation dans la valeur du coëfficient du frottement, cela vient en grande partie de ce qu'il n'a fait mouvoir la machine que très-peu d'instans, et qu'il n'a pu éviter entièrement la force d'adhésion qui se fait sentir dans les premiers instans du mouvement; pour cette raison faudrait-il toujours attendre pour obtenir ces sortes de déterminations, que le mouvement fût devenu uniforme. L'inconvénient signalé ci-dessus s'est fait sentir d'une manière beaucoup plus grave, dans le mouvement des corps mus en ligne droite.

33. Supposons (Fig. 3) qu'au moyen de la poulie D, et du poids moteur P, on mette en mouvement l'axe de la poulie C, sur la crapaudine *iak*; le frottement de cet axe, dans la crapaudine, suivra la loi du carré de la vitesse, quel que soit le diamètre de ces deux quantités. Ainsi, la même loi aura encore lieu, quand ces deux diamètres seront infinis, ou que la poulie C sera transformée en un corps de forme parallélipipède, se mouvant sur un plan et remplaçant la crapaudine *iak*.

34. Ainsi le frottement d'un corps se mouvant sur un plan, est encore proportionnel à la pression, multipliée par le carré de la vitesse.

35. Les expériences de Coulomb avec les bois glissant sur bois confirment les raisonnemens précédens; l'on ne trouve de variation dans le coéfficient du frottement, que, dans deux cas, lorsque les surfaces sont très-étendues relativement aux pressions, et lorsque les surfaces sont très-petites relativement à ces mêmes pressions, dans le premier cas la force consommée par le frottement paraît augmenter dans un plus grand rapport que le carré des vitesses, et dans le second, la force consommée par le frottement paraît être moindre que le carré des vitesses. Ces différences et ces anomalies ne doivent être attribuées qu'à la force d'adhésion qui n'était pas entièrement détruite, quoique l'on ébranlât le traîneau à petits coups de marteau, ou en le pressant par derrière au moyen d'un levier; ce qui est indubitable, puisqu'il avoue lui-même qu'il fallait une moindre force de traction pour continuer à faire mouvoir le traîneau, lorsqu'en le poussant, on lui avait imprimé une vitesse de 7 à 8 pouces par seconde, que lorsqu'on s'était contenté de l'ébranler.

36. Les expériences faites par Coulomb avec des métaux glissant sur bois, contredisent nos raisonnemens précédens; sous un traîneau de 15 pouces de longueur, il plaça deux règles de fer, de 18 lignes de largeur et de 15 pouces de longueur, saisissant le traîneau, à leurs extrémités, par des retours d'équerre. Tous les angles et arêtes furent arrondis pour qu'ils n'écorchassent pas les bois. Il fit ensuite glisser le traîneau armé des deux règles de fer le long du madrier dormant, et il nota les temps successifs. Comme il crut s'apercevoir tout de suite, que, soit que le traîneau glissât naturellement, soit qu'on lui imprimât une grande vitesse, après un ou deux pieds de marche, il prenait une vitesse uniforme; il se

contenta d'observer le mouvement lorsqu'il était réduit à l'uniformité. La surface de contact était de 45 pouces, et la course totale était bornée à 45 pouces.

La 23ᵉ. expérience lui donna

			Un pied parcouru uniformément dans un temps lent et incertain.
Iᵉʳ. Essai.	Force de traction	125 liv.	
IIᵉ. Essai.	....	135	1320″
IIIᵉ. Essai.	....	160	$\frac{148}{2}$
IVᵉ. Essai.	....	185	$\frac{44}{2}$
Vᵉ. Essai.	....	210	$\frac{18}{2}$
VIᵉ. Essai.	....	235	$\frac{5}{2}$
VIIᵉ. Essai.	....	260	$\frac{2}{2}$

37. L'on voit par cette table que depuis le troisième essai jusqu'au septième, la traction étant augmentée de 25 livres à chaque essai, la vitesse correspondante est toujours à peu près trois fois plus grande que la précédente; ainsi, les tractions croissant suivant une progression arithmétique, les vitesses croissent suivant une progression géométrique; et, les expériences précédentes conduiraient à représenter les lois de mouvement par les deux équations :

$$V = v^n,$$

$$P = p + nb,$$

dans lesquelles :

P exprime le poids moteur.

p .... le poids primitif qui est tout au plus suffisant pour produire une vitesse insensible.

b .... l'accroissement successif du poids moteur.

V .... la vitesse correspondante au poids total P.

v .... l'accroissement de vitesse correspondant à un accroissement b dans le poids moteur.

n .... le nombre des petits poids b, ajouté au poids primitif p, pour produire la totalité du poids moteur.

La quantité d'action motrice étant PV, on aura une quantité d'action qui sera exprimée par

$$v^n(p + ab)$$

et comme v^n exprime une puissance quelconque de la vîtesse, les deux membres de cette équation ne seront plus homogènes; et, elle sera aussi absurde que la comparaison, d'un choc avec une pression, ou, d'une quantité de mouvement avec une quantité d'action.

38. Ainsi ces essais faits avec une trop petite vîtesse, et sur lesquels différentes causes imprévues et inaperçues ont pu influer, ne méritent aucune considération, et ne peuvent contredire notre théorie et tous les faits précédens qui la confirment. Au reste, le lecteur ne pourra conserver aucun doute après le passage suivant de Coulomb, qui se trouve à la suite de ses remarques sur cette même expérience : « .... Mais il faut prévenir que l'on ne pourra regarder une pareille formule (*celle qui représenterait les essais précédens*) que comme un à-peu-près, qui ne doit déterminer les lois des frottemens relativement à la vîtesse, que pendant les premières heures où l'on soumet le traîneau aux expériences; qu'ensuite les frottemens ne croissent plus dans une aussi grande proportion relativement aux vîtesses; qu'il arrive même que la vîtesse cesse en entier d'avoir de l'influence sur le frottement, après que le mouvement d'une très-petite surface a été continué pendant long-temps sous de très-grandes pressions. » Il faut entendre ici par frottement, le coéfficient du frottement.

39. Nous avons déjà vu (22) qu'il fallait distinguer la résistance qui provient de l'adhésion de celle engendrée par le frottement. La première ne se fait apercevoir que lorsque l'on veut sortir les corps de l'état du repos pour leur donner du mouvement, mais lorsque le mouvement est régulier, la résistance pro-

venant de l'adhésion à disparu, et il ne reste plus d'autre résistance que celle provenant du frottement. Ainsi, la force d'adhésion devant croître, jusqu'à une certaine limite, par l'effet du repos, et ne pouvant suivre les lois des frottemens, voyons, si ce ne serait pas elle, qui aurait occasionné les anomalies, que l'on remarque dans les essais que nous venons de rapporter.

40. Prenons les expériences sur le frottement du bois de chêne, dont l'enduit était posé depuis huit jours, et avec lequel Coulomb avait fait plus de 50 opérations sans le renouveler. Le traîneau, dans chaque expérience, avait parcouru toute la longueur du madrier; par là, l'enduit s'était répandu par-tout d'une manière très-uniforme; il paraissait homogène, mais sa consistance avait changé, et il avait perdu beaucoup de son onctuosité. L'accroissement du frottement relativement au temps de repos se faisait très-lentement, et on pouvait espérer d'avoir une loi suivie dans les opérations. Le traîneau avait 4 pieds et demi de longueur, et la surface de contact était aussi de 4 pieds et demi.

Trentième expérience de Coulomb. Le traîneau était chargé, son poids compris de 5810 livres;
et en lui imprimant une vîtesse insensible, on trouvait qu'il continuait à se mouvoir sous une traction de 502 liv.

Après un repos de	2 minutes, la traction était de	790
....	4	866
....	9	925
....	26	1036
....	60	1186
Après 16 heures de repos	....	1535

41. On voit que ces deux suites approchent beaucoup de celles représentées par les deux équations:

$$t = aq^n$$

$$P = A + nb,$$

dans lesquelles :

t désigne le temps, que l'on a laissé reposer le corps, avant de faire l'expérience.

a .... le temps, que l'on a laissé reposer le corps, avant de faire la première expérience.

q .... l'accroissement du temps, que l'on a laissé reposer le corps, dans chaque expérience successive.

P .... la totalité du poids moteur à un instant quelconque.

A .... le poids primitif trouvé dans la première expérience.

b .... l'accroissement successif du poids dans les différentes expériences.

n .... le nombre d'intervalles de temps égaux à q.

Dans cet exemple, quand q est exprimé par 2, b a pour valeur 81. L'on voit ainsi la grande analogie qui existe entre ce cas, et celui où Coulomb s'est occupé du frottement des métaux, contre les bois; ce qui confirme la conjecture que nous avons émise, que l'adhésion n'est pas étrangère aux causes qui ont produit les anomalies trouvées par cet observateur.

42. Les expériences, que Coulomb a faites sur les cordes, prouvent que leurs frottemens suivent la même loi que ceux des autres corps, et qu'ils croissent comme les carrés des vitesses. Ainsi, lorsqu'on aura une machine construite, il sera très-facile de connaître par un petit nombre d'observations, quelle est dans tous les cas, la force consommée par la machine marchant à vide.

43. Mais il faut bien faire attention de ne pas confondre les frottemens des cordes avec leur roideur et leur adhésion.

Ainsi, si les cordes ne sont pas laissées en repos, et qu'on éprouve de nouveau leur roideur, on la trouvera quelquefois d'un tiers plus petite. Elle est plus sensible avec les grosses cordes et avec les neuves, qu'avec les petites, avec les petits rouleaux, qu'avec les gros. Elle ne reprend sa limite qu'au bout d'un repos de 5 à 6 minutes.

Ainsi, dans un mouvement alternatif, tel que celui des sonnettes, la roideur de la corde serait moindre que celle assignée ordinairement; et il résulte de cette observation, que les parties de la corde pliée, ne se redressent que lentement. Malgré ses expériences, Coulomb a commis l'erreur de faire la force consommée par le frottement, proportionnelle à la simple vîtesse, au lieu de la faire proportionnelle au carré de la vîtesse. S'il avait attendu, pour faire ses expériences, que le mouvement fût devenu régulier et uniforme; et s'il avait voulu calculer la force motrice consommée, il aurait bientôt reconnu son erreur. Il est vraisemblable, que la manière peu claire et même embrouillée, que l'on a employée jusqu'ici pour calculer les différens effets des machines, n'a pas peu contribué à l'empêcher de tirer une conclusion si facile, et, qui se présente si naturellement à l'esprit, après que l'on a assimilé le frottement à la force de la pesanteur ou à la résistance de l'air. Si en se contentant de faire le frottement proportionnel à la vîtesse, il l'avait pourtant multiplié par l'espace parcouru, il aurait encore rencontré juste; et cette manière de considérer le frottement n'aurait eu que l'inconvénient de l'assimiler à l'action d'un poids moteur, ce qui n'est pas vrai; car ce dernier peut acquérir la vîtesse par lui-même, tandis que la force vive consommée par le premier, ne peut avoir qu'une vîtesse transmise par un autre corps.

De quelques cas où la force consommée par les frottemens ne suit que la simple vîtesse, au lieu du carré de la vîtesse.

44. Nous allons parcourir quelques cas particuliers où la force, consommée par les frottemens, ne varie que comme la simple vîtesse, au lieu de suivre la loi du carré de la vîtesse, que nous avons assignée jusqu'ici; mais ces cas, au lieu de contredire la règle géné-

rale, ne font que la confirmer, comme nous le montrerons, en les exam inant es uns après les autres.

Des véhicules à roues.

45. Pour examiner ce qui se passe dans un véhicule à roues, supposons un corps, posé sur un plan, et mis en outre, en mouvement, avec une vitesse uniforme, parallèlement à ce plan. Si, dans la direction de la puissance, et entre cette dernière et le corps en mouvement, nous plaçons un dynamomètre ; ce dernier indiquera une pression proportionnelle à la vitesse du corps en mouvement, ce qui est une conséquence immédiate de la loi du frottement, en raison du carré de la vitesse.

Supposons à présent, que le plan, qui porte le corps, soit lui-même mis en mouvement avec la même vitesse que le plan ; alors la puissance au lieu d'avoir à faire un effort proportionnel au carré de sa vitesse, n'aura plus qu'à exercer un effort proportionnel à la simple vitesse ; et le dynamomètre, au lieu d'indiquer une pression proportionnelle à la vitesse, indiquera une pression constante et indépendante de cette vitesse. Ce cas est exactement (Fig. 4) celui de l'essieu d'une voiture, glissant dans l'intérieur de la boite *amb* de la roue ADB ; on voit que le corps mis en mouvement est l'essieu, le plan mobile est un élément de l'intérieur de la boite, qui a la même vitesse que la voiture. En effet, lorsqu'elle commence à être mise en mouvement, au rayon de la roue, qui d'abord appuyait sur le terrain, en succède un second, un troisième, etc. et par conséquent le centre de gravité du fardeau et de la voiture est toujours soutenu ; en sorte que l'on doit considérer la voiture, comme un corps, que l'on fait glisser sur un plan incliné, qui est, pour ainsi dire, le développement de la roue. L'angle de ce plan incliné est donné par la tangente commune à

l'essieu et à la boîte, ou par le rapport du frottement. Ainsi la force qui servira à vaincre le frottement de l'essieu dans la boîte de la roue, sera dans le rapport de la circonférence de la boîte à la circonférence de la roue, ou dans le rapport de leurs rayons. La même chose a lieu quand l'essieu est fixé aux deux roues et qu'il est mobile avec elles. Dans tous ces cas, si la vîtesse est uniforme, on aura la force consommée par les frottemens, seulement proportionnelle à la simple vîtesse.

46. Mais, pour cela, il faut que la voiture marche sur un terrain uni, et qu'elle ne rencontre aucun obstacle, autrement son mouvement ne serait plus un mouvement uniforme, mais une succession de mouvemens uniformément accélérés; et alors les raisonnemens ci-dessus ne lui seraient plus applicables. Au reste ces raisonnemens sont confirmés par les expériences que fit Rumfort avec sa voiture, pesant, tout compris, 1060 kilogrammes. Sur le même terrain, et quelle que fût l'allure de ses chevaux, il trouva toujours que le dynamomètre indiquait une résistance constante. Les différentes espèces de chemins éprouvés furent: l'accottement en terre de la route de Versailles, la chaussée en empierrement de S^t.-Cloud, une partie de route sablonneuse, une autre partie de route très-sablonneuse.

De la manivelle.

47. Le frottement, qui s'exerce au contact de la bielle AB (Fig. 5) avec le tourillon BD de la manivelle BC, présente le même phénomène que celui des brancards d'une voiture, reposant sur un essieu mobile avec les roues auxquelles il est fixé; et il croît, comme lui, dans le simple rapport de la vîtesse. En effet, C étant le centre fixe du mouvement de la manivelle, et BE un arc de cercle décrit de ce centre et passant par le centre du tourillon BD, cet arc représentera l'espace parcouru par le bras de la manivelle et de la bielle,

et sera proportionnel à la vitesse. Pendant une révolution entière de la manivelle, chaque point de la circonférence de son tourillon, viendra se mettre en contact avec le point D de la bielle; et ce mouvement sera semblable à celui d'une voiture, reposant sur le tourillon d'un essieu mobile et se mouvant, en même temps que les roues, qui sont fixées avec lui, et qui ont un rayon égal à celui BC de la manivelle. Ce raisonnement suffit, pour prouver que le frottement, occasionné par le contact de la bielle avec le tourillon de la manivelle, est proportionnel à la simple vitesse, et non au carré de la vitesse.

Du rouleau.

48. Soit (Fig. 6) un corps DB mu au moyen d'un rouleau AC reposant sur le plan AA'; au commencement du mouvement, le corps DB est en arrière du rouleau, et son point de contact, avec le rouleau AC, se trouve au point B; après que le rouleau a fait une révolution, il se trouve avoir repris la même situation, quoique transporté, en avant de sa première station, à une distance AA' égale à sa circonférence. De même, le plateau DB, au lieu de reposer sur le rouleau par l'intermédiaire du point B, a, pour point de contact, avec ce dernier, le point D, situé à une distance DB du point B, égale à la circonférence du rouleau, ou, égale à AA'; ainsi, le plateau se trouve avoir parcouru un espace double de celui parcouru par le centre du rouleau; l'espace parcouru par le corps étant proportionnel à la vitesse, les frottemens, que le plateau éprouve pour se mouvoir, ne croissent que comme la simple vitesse.

Des roues hydrauliques à aubes.

49. Il existe plusieurs espèces de roues hydrauliques: les plus en usage sont celles à pots, où l'eau agit par son poids; et celles

à aubes, où l'eau agit en dessous par l'excès de force, qu'elle possède, sur la force acquise par la roue. Ces dernières, dont nous nous proposons de donner ici la théorie, ont été appelées, par les auteurs, roues mues par le choc de l'eau, parce qu'ils croyaient que l'eau agissait contre les aubes continuellement par le choc. Cette dénomination paraît être impropre; si, comme nous le pensons, il n'y a effectivement choc que dans le premier instant où l'eau atteint les aubes; et si, quand le mouvement de la roue est devenu uniforme, il n'y a plus qu'une simple impulsion déterminée par la différence relative de la vîtesse de la roue et de la vîtesse du fluide. En effet, si, quand le mouvement est devenu uniforme, on partage, par la pensée, à partir de la roue, l'eau, qui est près d'atteindre les aubes, en tranches parallèles à ces aubes; on s'apercevra que les tranches qui sont près de la roue, n'ont qu'une vîtesse peu différente de celle de cette roue; mais que cette vîtesse s'accroît, à mesure qu'elles s'en éloignent, jusqu'à celles qui situées, à une certaine distance, possèdent toute la vîtesse du courant. Les différentes tranches de l'eau motrice ne perdent, que successivement, leur excès de force contre la roue; de manière que l'action de l'eau motrice se communique à la roue, par des tranches de liquide, qui ont déjà perdu une partie de leur action propre; mais qui transmettent l'action des autres tranches, à peu près, comme le font la plupart des corps qui composent les différentes parties ou les différens organes des machines.

50. Les roues à aubes peuvent donc être assimilées à un plan vertical, se mouvant en ligne droite, et recevant continuellement la pression de l'eau motrice; et c'est ce que nous tâcherons de prouver dans la théorie que nous allons exposer.

51. La quantité d'eau restant la même, Newton qui s'occupa le premier de cette question, trouva que la quantité de force reçue par la roue croissait comme le carré de la vîtesse du fluide.

52. Parent, mémoires de l'académie des sciences 1704, observa le premier, que lorsqu'une roue à palettes était mise en mouvement par l'action d'un courant, la vîtesse avec laquelle ces palettes étaient choquées, était la différence de la vîtesse du courant, et de celle du centre d'impression ou d'impulsion de la roue. Mais il crut que c'était au carré de cette différence que l'impulsion était proportionnelle. Parent chercha ensuite l'expression générale de l'effet de la machine, c'est-à-dire, le produit du poids, qu'elle élevait, par la vîtesse de ce poids, et trouva, que cette expression était un maximum, lorsque la vîtesse du centre d'impulsion des aubes de la roue était égale au tiers de la vîtesse du courant. Nous donnerons plus bas l'équation de Parent, d'après M. Navier, et nous tâcherons de montrer bien clairement en quoi consiste son erreur qui a été partagée par Pitot, Bélidor, Maclaurin et Albert Euler, et généralement par tous les mécaniciens.

53. Dans les mémoires de l'académie des sciences année 1767, Borda remarque, que, lorsque le mouvement est parvenu à l'uniformité, l'action instantanée du fluide sur les palettes, fait équilibre à l'action de la gravité sur le poids P; ou ce qui est la même chose, que la quantité d'action, que le fluide perd à chaque instant, dans le plan du mouvement de la roue, fait équilibre avec la quantité d'action que l'action de la gravité donne, au poids P, dans le même instant.

En ne considérant qu'une seule palette de la roue, soumise à l'action de la force du choc, Parent et ses prédécesseurs trouvaient, en appelant V la vîtesse de l'eau, et v celle de la palette, que le choc était proportionnel à $(V-v)^2$; et comme l'effet est nécessairement proportionnel à la vîtesse des palettes, multipliée par la force du choc, ils avaient représenté l'effet de la roue par $v(V-v)^2$; d'où ils déduisaient, pour le maximum, v égale $\frac{1}{3}$V. Mais, continue Borda, dans le mouvement dont il s'agit, il fallait observer que l'action de

l'eau ne s'exerce pas contre une palette isolée, mais contre plusieurs palettes à la fois; et que ces palettes fermant tout le passage du petit canal, et ôtant au fluide la vîtesse qu'il a de plus qu'elles, la quantité d'action perdue par le fluide, et par conséquent le choc qu'éprouvent les palettes, n'est plus proportionnel au carré de la différence des vîtesses du fluide et des palettes, mais seulement, à la différence de ces vîtesses. D'où il suit que l'effet est représenté par $v(V-v)$, et non par $v(V-v)^2$; et cherchant le maximum de $v(V-v)$, on trouve v égale $\frac{1}{2}$ V.

54. Dans ces raisonnemens, que nous avons reproduits presque textuellement, on ne voit pas trop la différence que produit, sur les effets de la roue, la distinction entre le mouvement d'une palette isolée et le mouvement simultané de plusieurs palettes. Pour nous, la seule différence que nous puissions faire entre ces deux cas, c'est que si, dans le premier, les palettes sont assez écartées pour permettre de n'en considérer qu'une seule, il serait à craindre que le mouvement de la roue ne fût pas aussi régulier que dans le second cas.

55. Cette réfutation, qui n'est pas très-claire, n'a pas empêché M. Navier de conclure [Note (*da*) pag. 337, dernier alinéa], que *personne n'avait encore remarqué que les solutions de Parent et de Borda étaient exactes toutes deux, et convenaient à deux cas différens:* l'une, pour les roues mues dans un courant indéfini, et l'autre, pour les roues mues dans un coursier; et que c'était probablement faute d'avoir fait cette remarque, que M. Girard avait cru, que les résultats de Borda et les expériences de Sméaton s'accordaient avec une théorie de Don-Georges Juan; d'après laquelle la résistance, dans les fluides indéfinis, serait proportionnelle à la vîtesse. Les expériences, que Bossut a faites avec une roue en petit, prouvent que le rapport des vîtesses de la roue et de l'eau motrice, qui donne le maximum d'effet, est le même, soit que la roue

soit mue dans un coursier ou dans un courant indéfini; et qui égale $\frac{2}{5}$, le même que celui donné par Sméaton.

56. Quand une roue à aubes, supposée sans pesanteur et sans frottement, est mue par l'eau, et soulève un poids au moyen d'une corde qui s'enroule autour d'un arbre: d'après les lois de l'homogénéité, lorsque le mouvement est devenu uniforme, le poids soulevé, quoique sollicité sans cesse par l'action de la pesanteur, doit être censé en équilibre avec l'impulsion de l'eau contre les aubes. Or, le poids soulevé, sollicité continuellement par l'action de la pesanteur, devant être considéré comme exprimant une quantité de mouvement, ne peut être en équilibre et avoir sa force retardatrice neutralisée que par une quantité de mouvement, c'est-à-dire, que par une masse mue avec une vîtesse constante. La masse, en mouvement, qui lui est opposée, est ici proportionnelle à la quantité du fluide fournie, dans un temps déterminé, et multipliée par la différence relative de la vîtesse de la roue à la vîtesse du fluide. Ainsi, en désignant par P le poids soulevé, par V la vîtesse du fluide, par v celle de la roue, et enfin par M la masse de l'eau dépensée dans une seconde, on aura

$$P = M(V - v),$$

et en multipliant ensuite, par v, les deux membres de cette équation, nous aurons la quantité d'action, déterminée par le poids, exprimée par l'équation

$$Pv = M(V\,v)\,v. \qquad (a)$$

57. M. Navier [Note (*da*), pag. 337] raisonne de la manière suivante, et remarque, que, pour la roue contenue dans un coursier, la masse du fluide, qui agit sur elle à chaque instant, est déterminée par la dépense de l'orifice qui lui fournit l'eau, et est absolument indépendante de la vîtesse de cette roue. Or, la masse du fluide

étant constante, la force d'impulsion ne dépend plus que de la vîtesse relative, avec laquelle l'impulsion s'effectue, c'est-à-dire, qu'elle demeure proportionnelle à $V-v$; et la quantité d'action reste proportionnelle à $(V-v)v$. Mais, dans un fluide indéfini, la masse du fluide, qui agit, à chaque instant, sur les aubes, est *variable* et proportionnelle à la vîtesse relative; en sorte que la force du choc est proportionnelle au carré $(V-v)^2$ de cette vîtesse, et la quantité d'action à $(V-v)^2 v$. Ainsi, comme nous l'avons déjà dit, il distingue dans les roues à aubes deux cas: celui où la roue se meut dans un coursier, et celui où elle se meut dans un courant indéfini. Dans le premier cas, il emploie la formule précédente due à Borda; et dans le second, il applique la formule de Parent.

58. Pour faire voir l'erreur du raisonnement qui sert de base à cette distinction, remarquons que, dans le cas d'un courant indéfini, le mouvement de la roue hydraulique est aussi régulier et aussi uniforme que dans le cas d'un coursier; et que la masse de l'eau, qui vient agir contre les aubes d'une roue hydraulique mue dans un courant indéfini, n'est pas moins invariable, ni moins constante, que dans le cas, où la roue à aubes se meut dans un coursier.

D'ailleurs, si l'on faisait, comme Parent et M. Navier, dans un courant indéfini :

$$P = M(V-v)^2,$$

et

$$Pv = M(V-v)^2 v.$$

On aurait en substituant pour v, la quantité $\frac{V}{3}$, dans le cas du maximum d'effet les deux valeurs

$$P = \frac{4MV^2}{9},$$

et

$$\frac{PV}{3}=\frac{4MV^2}{27};$$

c'est-à-dire, que l'on aurait une quantité d'action égale à une quantité de mouvement; ce qui serait aussi absurde que de comparer une pression avec une quantité de mouvement ou avec un choc.

59. Quand un fluide vient pousser une surface immobile, l'impulsion est bien proportionnelle au carré de la vîtesse du fluide; mais cela n'a plus lieu aussitôt que la surface opposée se meut avec une vîtesse proportionnelle à son action; alors la résistance de la surface n'est plus que simplement proportionnelle à la vîtesse du fluide; et on ne peut pas assimilèr ce second cas au premier, comme l'ont fait Parent et M. Navier. Dans les deux cas, la quantité d'action possédée par le fluide est bien la même, et reste toujours proportionnelle au carré de la vîtesse du fluide; contre une surface immobile elle agit tout entière; mais contre une surface mobile ayant un mouvement uniforme, elle n'agit pas tout entière; elle doit être divisée par la vîtesse de cette surface qui cède à son action, et elle se trouve ainsi ne conserver, contre la surface, qu'une force d'impulsion proportionnelle à la simple vîtesse. Nous avons déjà vu (45) un exemple analogue: nous avions trouvé, que, lorsque les organes mécaniques conservaient, entre eux, une position invariable, comme cela arrive dans la plupart des machines, la quantité d'action consommée par les frottemens croissait comme le carré de la vîtesse; mais, que cela n'avait plus lieu (61) pour les véhicules à roues qui possèdent une vîtesse proportionnelle à celle du moteur; et qu'alors la force, consommée par les frottemens, ne croissait que comme la simple vîtesse, toutes les fois que la vîtesse du véhicule était uniforme, et que l'espace parcouru n'était pas une succession d'espaces parcourus d'un mouvement uniformément accéléré ou d'un mouvement varié.

60. D'après un théorème généralisé par Carnot, mais déjà employé par plusieurs géomètres, et notamment par Borda : *toutes les fois que le mouvement d'un système de corps éprouve un changement brusque, la somme des forces vives, acquises par les divers points matériels du système pendant un certain temps, est toujours numériquement égale au double de la somme des quantités d'action que les forces, agissant sur ces points, ont imprimées pendant le même temps*. En observant que la force vive n'est que le double de la quantité d'action, le principe précédent peut être énoncé de la manière suivante : *Toutes les fois que le mouvement d'un système de corps éprouve un changement brusque, il en résulte une diminution, dans la somme des forces vives de tous les corps, équivalente à la somme des forces vives dues aux vitesses perdues ou gagnées, dans le même temps, par les mobiles*.

61. Cet énoncé fait entrevoir une analogie entre ce principe et celui de l'homogénéité, ou la méthode dont nous nous sommes servis précédemment ; pour rendre cette analogie plus claire, appliquons le principe de Carnot à la même question.

Nommons :

M la masse de l'eau dépensée dans une seconde.
H la hauteur due à la vitesse de l'eau.
V la vitesse de l'eau.
P le poids soulevé.
g l'espace parcouru, dans la première seconde de sa chute, par un corps qui tombe dans le vide.
v la vitesse de la roue.

MgH sera la quantité d'action dépensée par le moteur.
Pv .... acquise par le récepteur.
$MgH-Pv$ .... perdue.
$M(V-v)^2$ sera la force vive perdue par l'effet de l'impulsion de l'eau contre les aubes.

Mv^2 sera la force vive restante à l'eau après avoir agi contre la roue.

On aura donc, d'après le premier énoncé :

$$2MgH - 2Pv = M(V-v)^2 + Mv^2.$$

Substituant à la place de H sa valeur $\frac{V^2}{2g}$, l'équation prendra la forme suivante

$$MV^2 = 2Pv + M(V-v)^2 + Mv^2. \qquad (b)$$

En faisant attention que $2Pv$ exprime une force vive, on voit que, sous cette forme, la force vive, dépensée par la force motrice, est égale à la force vive, acquise par le récepteur, augmentée de la force vive de l'eau, perdue contre les aubes, et de la force vive restante à l'eau, après avoir agi contre les roues; de manière que ces différentes forces vives se font équilibre, autour du récepteur, conformément au principe de l'homogénéité. Ainsi, le principe dû à Carnot, n'est ici qu'un cas particulier du principe de l'homogénéité; et il a, en outre, le désavantage, sur ce dernier, d'être moins compréhensible; d'agir, comme un instrument mécanique qui ne laisse pas entrevoir les relations qui lient, entre elles, les différentes quantités qui composent le système; et d'arriver à ces mêmes relations d'une manière moins méthodique et plus compliquée, puisqu'il faut encore développer l'équation (*b*) pour arriver à l'équation :

$$Pv = M(V-v)v$$

qui n'est rien autre chose que l'équation (*a*) que nous avons déjà obtenue.

62. L'effet maximum a lieu, dans cette équation, quand v égale $\frac{1}{2}V$. Le second membre devient alors égal à $\frac{MV^2}{4}$; et en y

substituant V^2 égale $2gH$, il se réduit à $\frac{MgH}{2}$. Cette dernière expression montre que, dans le cas le plus avantageux, celui du maximum d'effet, la force utilisée n'est que la moitié de celle dépensée. Cette évaluation n'est qu'une limite que l'on n'atteint jamais, dans la pratique, à cause du jeu nécessaire au mouvement de la machine, et à cause des imperfections inévitables dans sa construction. En désignant par K le rapport de l'effet maximum donné par l'expérience à celui donné par la théorie, l'équation (*a*) prendra la forme

$$Pv = KM(V - v)v, \qquad (c)$$

et K sera une valeur moindre que l'unité. Borda la croyait égale à $\frac{1}{4}$, mais les expériences de Bossut et de Sméaton s'accordent à la faire un tant soit peu supérieure à $\frac{2}{5}$; et c'est celle qui est généralement adoptée, pour les roues à aubes mues dans un coursier.

Dans ce système particulier de roues hydrauliques, désignons par a l'ouverture de la vanne, et par b sa largeur; s'il n'y avait pas de contraction, le volume de l'eau, fourni par le bassin dans une seconde, serait égal à la surface de l'ouverture de la vanne, multipliée par la vitesse moyenne de l'eau V, c'est-à-dire, il serait égal à abV; mais, à cause de la contraction, la quantité d'eau dépensée n'est pas si considérable; et en désignant par c le coéfficient de la contraction, la quantité d'eau réellement dépensée dans une seconde, se réduit à $abcV$. En conséquence, la quantité d'action dépensée sera égale à $abcVH$, ou à $\frac{abcV^2}{2g}$, et la valeur de M sera représentée par $\frac{abcV}{g}$.

63. Dans un coursier, la force, dépensée dans une seconde, est bien toujours égale à la quantité d'eau, fournie par l'ouverture de la vanne dans le même temps, multipliée par la hauteur, d'où elle est descendue, ou égale à $abcVH$; mais il n'en est pas de même pour une roue mue dans un courant indéfini; et, en désignant par

b la largeur de l'aube, et par a la quantité dont elle est plongée dans l'eau, on ne peut pas prendre, pour la force consommée, $abVH$ ou $\frac{abV^2}{2g}$; parce que chaque molécule de l'eau, qui a perdu, en agissant contre la roue, une quantité m de sa vitesse, est pressée par les molécules voisines, et soulevée par les molécules inférieures, d'une quantité, égale à la hauteur due à la vitesse m; ce qui lui permet de prendre une direction latérale à celle du mouvement du fluide, et de reprendre sa première vitesse, pour passer et se mouvoir, avec les autres molécules, à l'entour du corps.

L'observation apprend aussi, que, dans le même temps que la surface du fluide s'élève, au-devant du corps, au-dessus de son niveau naturel, et produit une sorte de remous; elle s'abaisse au-dessous de son niveau, en formant une sorte de creux ou de dépression le long des faces latérales du corps et à son arrière. Cette restitution de force, faite par les molécules voisines et inférieures, pour donner, à la face antérieure du fluide, la vitesse nécessaire pour s'échapper, faire place au corps et remplir le vide qui tend à se former derrière le même corps, occasionne à la masse fluide agissant contre les aubes, une force double de celle qui aurait lieu si la même masse agissait dans un coursier. Aussi, faut-il prendre, dans le cas d'un courant indéfini, pour la force consommée, $\frac{abV^2}{g}$, au lieu de $\frac{abV^2}{2g}$.

64. Lorsqu'un corps est mis en mouvement par une force accélératrice, l'espace parcouru n'est que la moitié de la vitesse acquise dans le même temps; tandis qu'un corps, animé d'une vitesse uniforme, parcourt un espace d'une longueur égale à sa vitesse.

En conséquence, la force, qui agit sur le second, est double de celle qui s'exerce contre le premier; et si, la première est égale à la masse du moteur, multipliée par la hauteur due à la vitesse, la seconde doit être égale à la masse multipliée par le double de

la hauteur due à la vitesse. Cette théorie est entièrement confirmée par les expériences que Bossut a faites, dans un courant indéfini de plusieurs mètres de largeur, sur une profondeur de vingt centimètres; et qui donnent, pour le rapport de la force utilisée à la force dépensée, la fraction $\frac{1}{3}$ que l'on trouve avec la même roue à aubes, mue dans un coursier.

65. Dans un courant indéfini, la roue ne doit plonger, dans l'eau, que du quart, ou tout au plus, du tiers de son rayon; les aubes doivent être espacées d'une quantité égale à leur hauteur. Malgré les préjugés contraires qui s'opposent à ce qu'une aube en recouvre une autre, Deparcieux a prouvé, par des expériences directes (académie des sciences 1759), qu'une aube, placée derrière une autre, n'en recevait pas moins un certain effort de la part du courant; et que la situation de la roue où l'action du courant est la plus considérable, n'était point, comme on le croyait généralement, celle où l'aube est verticale; mais celle où deux aubes voisines sont également plongées dans l'eau. Quant à l'inclinaison des aubes, l'angle le plus avantageux qu'elles puissent faire avec le rayon mené à leur extrémité inférieure, diminue à mesure que la roue plonge, dans l'eau, sur une plus grande hauteur. Il est d'environ trente degrés, quand la roue plonge du $\frac{1}{4}$, ou du $\frac{1}{5}$ du rayon; et d'environ 15 degrés, quand elle plonge de la moitié de ce rayon.

66. Nous verrons (106), que la quantité d'action, consommée par le frottement de la roue hydraulique soumise à nos expériences, est équivalente au quart de la force vive déterminée par le coéfficient du frottement rapporté au centre d'impulsion de la roue, et multiplié par le carré de la vitesse de ce même centre d'impulsion. Il est vraisemblable, que ce rapport restera le même, quand le centre d'impulsion conservera une situation semblable, par rapport aux différentes masses inertes qui composent les organes, ce qui permettra de calculer, à priori, la force consommée par les

axes, quand on n'aura pas le moyen de la conclure de l'expérience, comme nous l'avons fait (104, 105).

67. Il faut observer que le frottement doit toujours être rapporté au centre d'impulsion du récepteur; sans cela, on s'exposerait à avoir, pour la force consommée par le frottement, une quantité moindre ou plus grande que celle qui existe réellement, et cela, dans le rapport du rayon, que l'on aurait adopté, au rayon du centre d'impulsion; et l'erreur ainsi occasionnée serait d'autant plus grande que le rapport de la force, consommée par le frottement, à la force transmise au récepteur, serait plus grand; et une série d'expériences, où l'on aurait commis une telle erreur, pourrait conduire à des conséquences très-erronées et très-éloignées de la vérité. Si l'on avait à calculer les frottemens de plusieurs organes à la fois, il faudrait rapporter les frottemens de chacun d'eux à leur centre d'action particulier, en calculer la force vive, comme nous venons de l'indiquer ci-dessus, la multiplier par le rapport $\frac{K}{4}$, ou par ce rapport, convenablement modifié d'après la disposition des différentes masses inertes, comme nous le montrerons dans la suite de ces recherches; et en rapportant ensuite, chacune de ces forces vives, au centre d'impulsion du récepteur, par les règles ordinaires que l'on trouve dans tous les traités de mécanique, et en les sommant, on obtiendrait la quantité d'action totale, consommée par les frottemens. Mais cette méthode, qui ne peut manquer d'être pénible et basée, dans son application, sur quelques données un peu variables et incertaines, ne doit être employée que pour établir un projet, ou que quand on n'a pas eu le temps ou la facilité de soumettre la machine à l'expérience.

Roues verticales à aubes courbes.

68. Si l'on a une roue hydraulique verticale, et qu'au lieu de lui donner des aubes planes ordinaires, on lui fasse des aubes courbes telles que celles (Fig. 8), où l'eau entre, à peu de chose près, tangentiellement à l'aube BG de la roue, il n'y aura pas de choc sensible lors de l'entrée de l'eau dans la roue, et par conséquent, très-peu de perte de force vive. L'excès de la vitesse de l'eau sur la vitesse de la roue, sera employé à faire glisser l'eau le long de l'aube, et à la faire élever à une hauteur sensiblement égale à celle due à la grandeur de cet excès. Par conséquent, si le seuil E ou ressaut du coursier, est tellement placé, que le bord inférieur de l'aube y soit arrivé, précisément au moment où l'eau parvient à sa plus grande élévation; l'eau redescendra le long de la courbe, et communiquera à l'aube, par sa pression, une force égale à celle qu'elle conservait encore après sa première impulsion sur la roue.

Ainsi, les roues à aubes de cette espèce, devront acquérir théoriquement une force double de celle des roues ordinaires à aubes planes; et la formule qui représente leur mouvement, sera la même que celle (a) dont il suffira seulement de doubler le coéfficient constant.

69. Quant à la hauteur BG ou AG de l'aube, si la roue doit faire mouvoir une machine, où la force, utilisée par le travail, soit proportionnelle à la simple vitesse; pour que la force, utilisée par le travail, soit un maximum, il faudra que la vitesse de la roue soit inférieure à la moitié de la vitesse du courant; et par conséquent, pour utiliser la plus grande quantité de force motrice, il faudra faire la hauteur de BG, suivant la verticale, plus grande que le quart de la chute totale de l'eau motrice, et égale au tiers et même à plus de la moitié de la chute totale.

Si la force, consommée par le travail, croissait dans un plus grand

rapport que le carré de la vîtesse : pour obtenir le maximum de la force utilisée par le travail, il faudrait faire mouvoir la roue avec une vîtesse plus grande que la moitié de celle du courant, et il suffirait de prendre, pour déterminer BG, une hauteur moindre que le quart de la chute totale.

70. On ne doit pas craindre de multiplier le nombre des aubes dans les roues de cette espèce, une roue de 4 mètres de diamètre en a jusqu'à 40 ; et peut-être pourrait-on encore augmenter ce nombre. Il faut, en outre, rendre très-faible l'épaisseur des aubes à la circonférence.

Nous croyons aussi que l'arête du ressaut doit être située sur la verticale passant par l'axe de la roue, pour que l'eau ne soit pas retenue quand elle est parvenue au-delà de l'axe, et qu'elle ne fasse pas contre-poids pour ralentir le mouvement.

71. M. Poncelet, capitaine du génie, inventeur de ce système, et pour lequel il a remporté un prix proposé par l'académie des sciences, croit que l'on doit placer l'arête du ressaut à une certaine distance au-delà de la verticale passant par l'axe de la roue, et que cette distance doit être proportionnelle à la hauteur DE. Cette disposition, outre l'inconvénient que nous venons de signaler, aurait peut-être encore le désavantage de laisser séjourner un peu d'eau dans le coursier.

La partie EB du coursier doit être circulaire et n'embrasser guère plus de deux aubes.

72. Les expériences en petit et en grand faites par M. Poncelet, prouvent que ces roues utilisent environ : cinquante pour cent de la force motrice, en prenant, pour la hauteur de la chute, la différence de niveau entre la surface de l'eau et le point inférieur de la roue ; et soixante pour cent, en prenant, pour la hauteur de la chute de l'eau, la différence de niveau entre la surface de l'eau et le centre du pertuis. Ainsi, la force, utilisée par ces roues, est au moins moitié en

sus, et quelquefois presque le double de celle utilisée par les roues ordinaires. Aussi leur adoption générale n'est pas douteuse, puisqu'elles ne le cédent qu'aux roues mues par le poids de l'eau.

Trouver l'ouverture de vanne qui procure à la roue une vîtesse demandée, tout le reste étant connu d'ailleurs.

73. En résolvant successivement l'équation (a) par rapport aux différentes quantités qui y entrent, on aura la solution de toutes les questions que l'on peut se proposer. Mais, quand on demande l'ouverture de la vanne ou la vîtesse moyenne de l'eau qui communique à la roue une vitesse donnée; la valeur obtenue, étant fonction de V, est illusoire; puisque V est elle-même fonction de l'ouverture de la vanne. S'il s'agissait d'une roue plongée dans un courant indéfini, et que l'on voulût connaître de combien il faut plonger les aubes pour obtenir une vîtesse désirée; la même difficulté ne se présenterait pas, puisqu'alors V est invariable.

74. Pour exposer la méthode d'approximations et de substitutions successives, que l'on peut employer en pareil cas, et qui dispense d'avoir recours à une analyse plus pénible et plus compliquée quoique plus savante, reprenons l'équation

$$Pv = \frac{abcVK}{g}(V - v)v,$$

et résolvons-la par rapport à a qui est l'inconnue demandée, nous aurons :

$$a = \frac{Pg}{bcKV(V - v)}. \qquad (d)$$

Mais V exprimant la vîtesse moyenne de l'eau motrice dépend

de la hauteur du niveau de l'eau au-dessus du centre de l'orifice, et par conséquent n'est pas indépendante de la quantité a avec laquelle elle est liée par l'équation

$$V = \sqrt{2g(H - \tfrac{1}{2}a)}. \qquad (e)$$

En faisant pour V une supposition quelconque, on déduira pour b une première valeur qui servira à calculer une seconde valeur de V plus approchée que la première; cette seconde valeur de V donnera pour a une seconde approximation; et en continuant ainsi, on aura pour a une valeur aussi approchée que l'on voudra.

75. Pour donner un exemple de cette approximation, supposons que le niveau de l'eau soit de 2 mètres au-dessus de la base de l'orifice, et supposons en outre

b égale 070.
K ...... $\frac{2}{3}$.
c ...... $\frac{2}{3}$.
P ...... 200 kilogrammes.
v ...... 2 mètres.

En prenant pour V la vitesse due à la hauteur de 2 mètres, nous trouverons V égale 6,278.

Valeurs successives

de V		de a
6,278	....	0,2353
6,076	....	0,2546
6,061	....	0,2562
etc.	....	etc.

dans la valeur de a n'y ayant de variable que $V(V-v)$, et $\frac{Pg}{bcK}$ étant constant, ces rectifications successives s'effectuent prompte-

ment; et une valeur directe de a, qui ne contiendrait rien de variable, ne donnerait pas, sans doute si promptement, une valeur numérique, quand on en viendrait aux applications particulières. Cette méthode serait encore praticable, quand même V serait donné par une table, au lieu d'être donné par l'équation (e).

76. Touver la vitesse moyenne de l'eau, qui communique à la roue, une vitesse demandée, tout le reste étant donné d'ailleurs.

L'équation (c) résolue par rapport à V, donne d'abord

$$V=\frac{v}{2}+\sqrt{\frac{pg}{abcK}+\frac{v^2}{4}}$$

et comme a n'est pas indépendant de V, on opérera comme ci-dessus par substitutions et rectifications successives, en prenant pour a des valeurs de plus en plus approchées, tirées de l'équation (e), qui donne

$$a=2H-\frac{V^2}{g}.$$

De la manière de conclure la force utilisée de la force dépensée.

77. Quand le maximum de force utilisée par une roue à aubes, a lieu avec une vitesse moitié de celle du courant; l'équation (a) donne la force utilisée dans tous les autres cas où cette force est obtenue avec une vitesse de roue, différente de celle qui donne le maximum d'effet; mais elle ne peut plus s'appliquer, d'une manière rigoureuse, quand le maximum d'effet s'obtient avec une vitesse de roue, différente de celle de la moitié de la vitesse du courant; et alors nous avons cru, que l'on pouvait employer, dans la pratique, comme approximation, la méthode que nous allons exposer.

Nous rappellerons d'abord que dans une roue à aubes mue dans un coursier on a (62):

$$\frac{abcV^2}{2g},$$

pour la force dépensée, et

$$\frac{KabcV}{g}(V-v)v,$$

pour celle utilisée. Le rapport de ces deux quantités est

$$\frac{2K(V-v)v}{V^2},$$

et sa partie variable

$$\frac{(V-v)v}{V^2}=Q,$$

est aussi identique avec celle contenue dans le rapport de la force utilisée à la force dépensée par une roue mue dans un courant indéfini.

78. Connaissant le rapport T de la force utilisée à la force dépensée dans le cas où la vîtesse de la roue est celle du maximum d'effet, pour obtenir la force utilisée dans les autres cas: nous remarquerons, que le numérateur de l'expression Q est le quart du dénominateur, quand la force utilisée est celle du maximum, et que ce maximum a lieu pour une vîtesse de roue, moitié de celle du courant; de manière qu'alors 4Q est égal à l'unité.

Si, dans tout autre cas où la force utilisée ne serait pas celle du maximum d'effet, on la déduisait, de celle dépensée, en la multipliant par 4TQ, cette manière de l'obtenir présenterait bien souvent de grands avantages; mais on peut encore la modifier, en

désignant par p, le rapport $\frac{v}{V}$, et en remarquant que l'expression Q prend alors la forme de $p\,(1-p)$.

79. A présent que nous venons d'exposer la manière d'obtenir la force utilisée dans le cas où le maximum d'effet a lieu avec une vitesse de roue, moitié de celle du courant; passons aux cas où ce maximum a lieu avec tout autre vitesse. Dans ces derniers cas, on doit avoir une formule ou une méthode à peu près semblable à la précédente, et qui donne aussi comme elle, une force réduite ou utilisée nulle, quand les rapports de vitesse sont égaux à l'unité, et quand ils sont égaux à zéro.

Supposons, que le rapport de vitesse, qui donne le maximum d'effet, au lieu d'être 0,5, soit n, et supposons, en outre, que l'on veuille obtenir la force utilisée dans le cas où s est le rapport de la vitesse de la roue à la vitesse moyenne de l'eau; si s est plus grand que n; nous observerons que si nous prenions, pour l'un des facteurs du produit $p\,(1-p)$, la quantité $0{,}5+s-n$, ce produit ne deviendrait pas zéro quand $s-n$ serait égal à $1-n$; et que cette condition, qui est nécessaire, et que nous nous sommes imposée, peut être remplie, d'une manière très-simple, en faisant varier la différence $s-n$, dans le rapport $\frac{0{,}5}{1-n}$ ou $\frac{1}{2(1-n)}$; alors les deux facteurs du produit ci-dessus deviendront

$$0{,}5+\frac{s-n}{2(1-n)} \quad \text{et } 0{,}5-\frac{s-n}{2(1-n)}.$$

Si s était plus petit que n, la différence $n-s$ devrait être réduite dans le rapport $\frac{0{,}5}{n}$ ou $\frac{1}{2n}$, et les deux facteurs cherchés

seraient alors

$$0{,}5 + \frac{n - s}{2n} \quad \text{et} \quad 0{,}5 - \frac{n - s}{2n}.$$

80. Pour montrer encore plus clairement la manière d'opérer dans les applications, prenons un cas particulier, et supposons que le rapport de vitesse, qui donne le maximum d'effet, soit 0,40; et que l'on veuille trouver la force réduite utilisée, avec le rapport de vitesse 0,76; nous prendrons la différence 0,36 qui existe entre 0,40 et 0,76, et en multipliant cette différence 0,36 par $\frac{1}{6}$, nous aurons 0,30, et nous ferons ensuite 0,50 + 0,30 et 0,50 — 0,30 égaux à p et à $1 - p$, ce qui nous donnera la formule modifiée.

Si le rapport des vitesses était moindre que 0,40, qui donne le maximum, il aurait fallu multiplier la différence par $\frac{1}{4}$, au lieu de la multiplier par $\frac{1}{6}$.

81. On voit que, de cette manière, la force réduite sera nulle, quand le rapport des vitesses sera égal à l'unité, ou, égal à zéro; et quoique cette modification ne soit pas rigoureuse, et ne soit qu'une simple approximation, elle sera pourtant plus exacte que de se servir tout bonnement de la formule déduite immédiatement de la théorie, qui n'a lieu que pour le cas d'une machine parfaite.

Quoique la roue, soumise à nos expériences, participe des roues à aubes et des roues de côté, nous avons trouvé que la modification précédente s'y appliquait assez exactement, et n'occasionnait aucune différence sensible.

Manière de connaître l'accroissement de vîtesse, que l'eau peut acquérir, en sortant du pertuis, et en parcourant un coursier, soit rectiligne, soit circulaire, avant de toucher les aubes de la roue hydraulique.

82. Quand la base du pertuis est peu élevée au-dessus du point le plus bas de la roue, et que l'ouverture de la vanne se trouve à peu de distance de ce point, l'eau, en se mouvant dans un coursier, incliné au dixième, conserve, en frappant les aubes, à peu près la vîtesse qu'elle avait en sortant du pertuis; et on peut prendre, sans erreur sensible, pour vîtesse moyenne, la vîtesse du filet d'eau, placé au centre du pertuis, et supposé tomber de la hauteur qui existe, entre la surface de niveau de l'eau et ce centre. Dans ce cas, d'après les expériences de Sméaton et de Bossut, une roue ordinaire à aubes, donnera son maximum d'effet, lorsque sa vîtesse sera les quatre dixièmes de celle du courant, ou de la lame d'eau qui vient la pousser. Mais, si l'eau, après être arrivée sur une des aubes, descend dans un coursier circulaire; alors la force, reçue par la roue, sera plus grande que celle due à la hauteur de l'eau, au-dessus du centre du pertuis; et pour le maximum d'effet, la vîtesse de la roue devra être plus grande que les quatre dixièmes, de la vîtesse de l'eau sortant par le pertuis.

Ainsi (Fig. 7) l'eau, après avoir poussé la roue en ED, continue d'agir, par une partie de son poids, sur les aubes situées entre ED et la verticale AC. Le poids de l'eau, qui se trouve entre les aubes AB, repose, en grande partie, sur le coursier circulaire, et n'a aucune action pour accroître la force de la roue; la partie de son poids, qui s'appuie sur les aubes, et augmente la quantité d'action utilisée, est très-faible, et demanderait un travail très-laborieux, pour la calculer dans chaque cas particulier; cette quantité varie

d'ailleurs, avec la vitesse de la roue, la hauteur de la chute et l'ouverture de la vanne. Puisqu'elle n'est qu'une très-petite portion de la quantité d'action que l'eau recevrait en tombant de la hauteur 0,48, qui est la chute totale de la partie circulaire du coursier; qu'elle n'augmente pas beaucoup l'action, que l'impulsion de l'eau, sur les aubes, communique à la roue; et qu'il serait difficile de l'estimer exactement, nous avons cru, que l'on pouvait supposer, sans erreur sensible, que la force, acquise par le récepteur, était l'effet de l'impulsion due à l'eau tombant d'une certaine hauteur; et que cette hauteur pourrait être déterminée par une quantité constante ajoutée à la hauteur qui existe entre la surface de l'eau et le centre du pertuis. La quantité constante ajoutée sera petite par rapport à la chute totale ainsi déterminée, et elle n'augmentera que faiblement la quantité d'action utilisée; et cet accroissement croîtra, avec l'ouverture de la vanne, comme cela doit être évidemment.

83. Le moyen de trouver, quelle est la quantité constante, qui détermine l'accroissement le plus conforme à la réalité, consiste d'abord, à comparer entre elles, les expériences faites avec différentès hauteurs du niveau d'eau; et ensuite, des expériences faites avec différentes ouvertures de vanne. Nous nous sommes servis, à cet effet, des expériences des 5 et 10 octobre, faites avec la machine allant à vide. Pour parvenir à notre but, sans connaître la force utilisée par la machine, il nous suffira de prendre la force totale dépensée *réduite;* de la diviser par le carré de la vitesse; et de chercher, par tâtonnement, quelle est la hauteur de chute, qui donne les quotiens les plus constans et les plus réguliers.

84. Le premier tableau donne les principaux détails des calculs, que nous avons exécutés dans trois suppositions différentes faites successivement. Dans ce tableau, les nombres, désignés par *rapports de vitesses*, expriment toujours le rapport de la vitesse

de la roue, à la vitesse due à la hauteur de la chute de l'eau, au-dessus du centre du pertuis, cette hauteur étant augmentée de la quantité nécessaire pour avoir égard à la partie circulaire du coursier.

Pour conclure la force utilisée réduite de la force dépensée, dans le cas où l'accroissement de chute est zéro, nous avons regardé le rapport 0,65, comme celui qui donne le maximum d'effet; et dans les deux autres cas nous avons pris, pour le même objet, celui 0,50.

On voit, qu'entre nos trois suppositions, celle qui donne l'irrégularité la moins considérable, est celle où l'on suppose l'accroissement de chute de deux décimètres. D'autres calculs analogues nous ont déterminé à l'adopter; et c'est celui dont nous nous sommes servis, dans toutes les expériences faites sur la scierie.

85. D'ailleurs, si l'on considère que la partie circulaire du coursier, n'a, au-dessus du point inférieur de la roue, qu'une hauteur de 0,46; la fixation de deux décimètres, pour la quantité constante, qui doit être ajoutée à la hauteur de l'eau au-dessus du centre du pertuis, revient à supposer, que la partie de l'eau, qui agit par son poids, dans la partie circulaire du coursier, n'est qu'environ le quart ou le cinquième de l'action qui serait due à la hauteur totale de ce coursier. Ce qui ne doit pas étonner, vu que l'eau, dans sa descente, repose en grande partie sur le coursier; et que la partie restante, qui agit, par son poids, sur les aubes, a des bras de levier très-faibles.

Nous avons supposé, dans nos calculs, que tous les organes, qui composent la machine, se mouvaient avec une vitesse proportionnelle à la vitesse du centre d'impulsion; tandis que, réellement, ils se mouvaient avec une vitesse proportionnelle à la vitesse angulaire de la roue hydraulique. Mais, comme la vitesse du centre d'impulsion n'a pas, dans ces expériences, différé beaucoup de sa vitesse angulaire, l'erreur n'a pu être que très-faible. Et d'autres calculs, où l'on avait évité cette cause d'erreur, ne nous ont offert

que des différences peu sensibles avec les premiers que nous présentons.

De la situation du centre d'impulsion de la roue.

86. Nous avons supposé, dans nos calculs, que le centre d'impulsion de la roue, ou le point, contre lequel tout l'effort de la lame fluide devait être censé réuni, était situé, à partir de l'extrémité extérieure de l'aube, à une distance égale à la moitié de la hauteur de l'ouverture de la vanne.

M. Navier dit, dans ses notes sur Bélidor, que « *l'on ne se trompera jamais dangereusement, dans la pratique, en plaçant le centre d'impulsion au centre de la partie de l'aube plongée dans le courant.* »

Dans notre manière de déterminer le centre d'impulsion, nous n'avons pas fait attention, que, lorsqu'un corps immobile se trouve plongé en partie dans un courant, près du côté du corps exposé à son action, l'eau s'élève au-dessus de son niveau; mais cette élévation de l'eau ne peut jamais dépasser la hauteur due à la vitesse du courant. Près d'une roue à aubes, immergée dans un courant, l'eau ne peut s'élever, au-dessus de son niveau, que, par la différence de vitesse de la roue et du courant; et le maximum de cette élévation ne peut jamais dépasser la hauteur due à cette différence de vitesse. Dans l'hypothèse, que nous avons adoptée, le centre d'impulsion de la roue se trouve plus écarté de la roue, que dans celle de M. Navier.

Nous pourrions alléguer, en notre faveur, que tous les filets fluides n'ont pas la même vitesse et la même force; et que ceux qui sont les plus bas, ont, non-seulement plus de force, mais agissent avec des bras de levier plus longs. Nous pourrions ajouter encore que, pour cette raison, plusieurs auteurs ont placé le centre d'impulsion au tiers de la partie immergée dans le courant, à partir

de l'extrémité inférieure ; mais, faisons l'élévation de l'eau, au-dessus de son niveau, égale à la différence de vitesse de la roue et du courant ; et appliquons-la aux expériences du 5 octobre, faites avec la scierie allant à vide, nous trouverons :

Ouvertures de la vanne	0,08	0,29
Différences des vitesses de la roue et du courant.	1,744	0,649
Hauteurs dues à cette différence	0,2982	0,1819
Ces hauteurs augmentées des ouvertures de la vanne	0,3782	0,4719
Rayons du centre d'impulsion	1,7859	1,7391
Vitesses du centre d'impulsion	2,915	3,828
Vitesses trouvées précédemment	3,158	4,028
Rapports entre ces deux vitesses	0,9230	0,9503

87. On voit, par là, que, quoique les ouvertures de la vanne fussent très-différentes, les vitesses du centre d'impulsion ont varié presque d'une manière proportionnelle ; qu'il est très-difficile de déterminer ainsi, quelle est la meilleure hypothèse ; et qu'il faudrait des expériences très-exactes pour déterminer la position réelle de ce centre.

Pour que l'eau atteigne les hauteurs précédentes au-dessus de son niveau, il faut :

Pour les ouvertures de la vanne	0,8	0,29	
Une durée de	0,2466	0,1925	secondes
et dans le même temps, les espaces parcourus par le centre d'impulsion de la roue seraient	0,7187	0,7379	
Ainsi ces espaces seraient	2,41	4,042	fois

plus grands que le maximum d'élévation que l'eau puisse avoir au-dessus de son niveau.

88. D'après cet exemple, on est donc porté à douter, que l'eau, près de la roue, puisse jamais atteindre ce maximum au-dessus de son niveau; et en considérant le jeu de la roue, on ne sera pas éloigné de supposer le centre d'impulsion, placé dans la situation que nous avons adoptée.

Du frein et de son usage.

89. Pendant long-temps, le seul moyen que l'on connût pour mesurer la force des machines ou des moteurs, consistait à suspendre un poids à une corde qui s'enroulait sur l'arbre de récepteur; ce moyen nécessitait souvent un grand nombre de poulies de renvoi, et devenait très-compliqué et très-dispendieux. M. Hachette paraît avoir été le premier qui ait imaginé un autre moyen plus aisé, mais qui n'en est pas moins assez compliqué. M. de Prony, en s'emparant de son idée, a construit un instrument si simple, si commode et si peu dispendieux, qu'il a rendu un très-grand service aux arts; et l'on peut espérer que les expériences deviendront plus nombreuses, et amèneront les machines à un grand degré de perfection.

90. Le frein se compose de deux poutrelles, que l'on place, pour s'en servir, l'une au-dessus, et l'autre au-dessous de l'arbre de la roue; et dont l'une, plus longue que l'autre, fait fonction de levier. Ces deux poutrelles sont évidées d'une manière symétrique, et suivant un arc de cercle; de manière à augmenter leur frottement contre l'arbre, sans nuire pourtant à leur solidité. Cet évidement est revêtu d'une feuille de tôle ou de cuivre, pour éviter le frottement du bois contre bois. A l'extrémité de la poutrelle-levier, se trouve une frette avec un crochet servant à suspendre les poids nécessaires. Pour maintenir le levier, dans la position horizontale, à égale distance du centre de l'évidement, on

perce deux trous, sur chaque poutrelle, pour le passage de deux forts boulons taraudés sur une très-grande longueur; ces boulons forcent, au moyen des écrous, les deux poutrelles à se rapprocher et à se serrer contre l'arbre, de manière à obtenir le frottement désiré. Pour faciliter le rapprochement des deux poutrelles ou mâchoires de frein, il serait bon que les écroux fussent armés de quatre bras, ou poignées. Pour que le centre du frein, c'est-à-dire, le point, qui se trouve au milieu des centres des deux mâchoires du frein, ne se déplaçât pas si facilement, et restât mieux dans le même point que le centre de l'arbre; il serait préférable, au lieu de faire l'évidement en partie circulaire, de l'exécuter, suivant une section angulaire, telle que la droite, qui joindrait les deux sommets, divisât les deux angles en deux parties égales, et passât par le centre de l'arbre.

91. Quand on veut se servir de cet instrument, il faut d'abord chercher quel est le poids, qui placé au petit bout de la grande poutrelle servant de levier, fait équilibre au poids de l'autre extrémité de la même poutrelle. Ce à quoi on parviendra facilement, en plaçant le centre de l'évidement du levier, sur l'arête d'un couteau ou d'une barre de fer, assujettie horizontalement; on divisera ensuite la distance de ce poids au centre de l'évidement, par la distance de ce même centre au milieu du crochet servant à suspendre les poids; et le quotient sera la quantité dont il faudra augmenter le poids accroché, pour avoir le poids total faisant équilibre à la quantité de mouvement consommée par le frottement du frein. La petite poutrelle, devant être construite d'une manière symétrique par rapport au centre de l'évidement, n'exigera pas une opération semblable. On embrassera ensuite l'arbre, avec les deux mâchoires du frein, de manière que la partie évidée appuie contre l'arbre, et que la grande poutrelle soit en dessus. Il est évident que, si les écroux ne sont pas assez serrés, l'arbre pourra tourner

sans entraîner le frein; et que, s'ils sont très-serrés, l'arbre l'entraînera, et qu'il faudra une très-grande force pour l'empêcher de tourner et le maintenir horizontal. Dans ce dernier cas, l'arbre restera immobile, ou du moins n'aura qu'une très-petite vîtesse; tandis que, dans le premier cas, la vîtesse de l'arbre ne sera nullement affectée. On conçoit donc la possibilité de serrer les écroux de façon à réduire la vîtesse de l'arbre à telle limite voulue.

92. Si ensuite on place un poids, à l'extrémité du levier, de manière à le maintenir horizontal; ce poids devra être considéré, comme s'enroulant sur un treuil du même rayon que le bras du levier du crochet par rapport au centre de l'évidement; et par conséquent, on aura la quantité d'action. qu'il exprime, en multipliant ce poids par le bras du levier du frein, en divisant le produit par le rayon de l'arbre de la roue, et en multipliant, enfin, ce dernier quotient par la vîtesse angulaire de la roue. Cette quantité d'action, augmentée de celle consommée par le poids et le frottement de la roue, donnera la quantité d'action totale, utilisée par la roue soumise à l'expérience.

93. Les aspérités de l'arbre, les défauts de centracité rendent le frottement du frein très-irrégulier, et le levier oscille continuellement en dessus et en dessous de l'horizontale; il faut une certaine habitude pour pouvoir et savoir bien s'en servir, et pour déterminer exactement le poids qui fait équilibre au frottement; c'est pourquoi, il est toujours nécessaire d'avoir des hommes qui, avec des cordes attachées à l'extrémité du bras du levier, maintiennent non-seulement le frein, pendant que l'on tâtonne pour serrer les écrous à volonté, mais encore pour l'empêcher d'être entraîné, quand le poids n'est pas suffisant, et qu'il survient quelques à-coups. Dans le cas même, où la force des hommes ne serait plus suffisante, il est nécessaire d'avoir un obstacle invincible qui, au moyen d'une corde ou autrement, retienne le frein. Ces cas arrivent encore assez fréquemment.

94. Il est bien difficile de bien apercevoir et de bien déterminer quel est le poids exact qui maintient le levier dans la position horizontale à cause des oscillations continuelles du levier, et à cause qu'une petite addition dans le poids ne semble faire varier que très-peu le centre ou le point milieu de ces oscillations. Aussi, toutes les fois que l'on pourra se procurer un dynamomètre, on fera bien de le substituer au poids; on évitera, de cette manière le tâtonnement des poids; on abrégera la durée de l'expérience; on aura une exactitude beaucoup plus grande; et l'on trouvera, en outre, l'avantage précieux de supprimer les hommes nécessaires pour maintenir le frein dans la position horizontale: fonction qui n'est pas sans danger, pour ceux qui l'exercent, et qui exige, de leur part, beaucoup d'attention et de prudence. Quand on se sert d'un poids pour mesurer la force du moteur, l'expérience ne peut s'exécuter que sur des arbres ayant une situation horizontale; mais, en employant le dynamomètre, on obtiendrait l'avantage inappréciable de pouvoir faire les expériences sur des arbres placés dans une situation quelconque.

95. Nous observerons, que le dynamomètre, à employer, n'est pas celui que l'on rencontre fréquemment sous le nom de M. Regnier; et qui est construit de manière que le ressort, agissant au moyen d'un petit bras de levier sur l'aiguille indicatrice possédant elle-même un mouvement indépendant de l'effort du ressort, ne peut marquer que l'effort maximum, exercé contre le ressort, pendant la durée de l'expérience; et il faut ramener ensuite l'aiguille indicatrice au point minimum pour refaire un autre essai. Dans le dynamomètre nécessaire aux expériences faites avec le frein, il faut que l'aiguille indicatrice soit la continuation du petit bras du levier moteur et fasse corps avec lui; de cette manière, l'aiguille indiquera, à chaque instant, l'effort que souffre le ressort; et pendant une même expérience, elle oscillera continuellement et indiquera

9

différens efforts; mais l'observateur fera attention à bien saisir le point central autour duquel les diverses oscillations paraissent s'effectuer. La pression, déterminée par ce point central, donnera la mesure de l'effet exercé par le moteur.

96. Si, un seul dynamomètre n'était pas suffisant pour mesurer la force de la pression, on pourrait en employer deux, en prolongeant la mâchoire inférieure du frein, et en lui donnant un bras de levier égal au premier. On pourrait même en employer un plus grand nombre en faisant un frein polygonal, construit d'une manière convenable; et on retomberait dans une machine analogue à celle de M. Hachette.

97. Pour éviter l'échauffement et l'embrasement de l'arbre, il faut charger un homme de jeter constamment de l'eau sur la partie de l'arbre qui éprouve le frottement du frein. De plus, pour que les centres des mâchoires restent en ligne droite avec le centre de l'arbre, il faut serrer également les deux écroux.

98. Pour avoir la vitesse angulaire de l'arbre, on observera le nombre de tours que la roue fait pendant un certain nombre de minutes; ou mieux, si l'on a une montre à secondes, ou un chronomètre, ou tout autre instrument du même genre, on observera le nombre de secondes écoulées pendant que la roue fait un certain nombre de tours. En divisant le nombre de tours, par le nombre de secondes écoulées, on aura la vitesse angulaire de la roue pendant une seconde. On aura bien soin de ne commencer cette dernière observation, qu'après que la roue aura fait au moins une douzaine de révolutions, c'est-à-dire, qu'après que son mouvement sera devenu régulier, ou pourra être censé devenu régulier.

99. Il faut bien faire attention, dans l'évaluation de la résistance opposée par le frein au mouvement de la roue, que l'on multiplie le poids, qui maintient le levier horizontal, par l'espace que parcourt le crochet du levier; non, parce que c'est la hauteur

à la quelle ce poids est élevé; mais bien, parce que ce poids exprime déjà une quantité de mouvement divisée par le double du coéfficient de la gravité, et qu'en la multipliant par la vîtesse, on a une quantité d'action qui peut être comparée avec la quantité d'action dépensée. Ainsi, quand on veut tenir compte de la quantité d'action, dépensée par le frottement, provenant du poids de la roue et de la direction de la force motrice; on ne peut pas se contenter de la faire simplement proportionnelle à la vîtesse de la roue, mais il faut encore la faire proportionnelle au carré de cette vîtesse. Les expériences sur la roue se mouvant seule, donneront, dans chaque cas, le coéfficient constant ou le coéfficient d'homogénéité qui affecte cette quantité d'action. Nos expériences, sur la scierie, nous ont montré la quantité d'action consommée, dans ce cas, égale au quart de la quantité d'action obtenue, en multipliant la résistance provenant du frottement, rapportée au centre d'impression, par le carré de la vîtesse de ce même centre. Mais ce rapport n'est pas le même dans tous les cas, parce qu'il ne dépend pas seulement de la pression exercée sur les tourillons, comme nous le verrons par la suite. Et jusqu'à ce qu'on ait des règles certaines, pour le calculer exactement dans chaque cas, on fera bien d'avoir recours à l'expérience, ou de ne regarder les calculs que comme une approximation très-grossière, mais qui peut être encore utile pour se guider dans les projets.

Manière déjà employée pour conclure la force, consommée par le travail, des expériences faites avec le frein de M. Prony.

100. Si l'on pouvait toujours, en faisant les expériences, obtenir la même vîtesse, rien ne serait plus simple que l'emploi du frein de M. Prony, pour connaître et mesurer la force consommée par le travail. Mais dans la pratique, quelque soin que l'on y apporte,

cette constance, dans la vitesse de la machine, est très-difficile à obtenir; et une différence très-petite suffit souvent pour apporter de grandes différences dans l'évaluation cherchée. Aussi le meilleur parti que l'on puisse prendre, c'est d'avoir une méthode qui puisse permettre de s'en passer. Le frein est un instrument si récent que l'on s'en est encore peu servi, et que l'on n'a même que peu de données sur la manière de s'en servir et d'en tirer des conséquences utiles. M. Woisard, qu'une mort prématurée, vient d'enlever malheureusement aux sciences, en a fait pourtant connaître une qui se trouve insérée dans le compte rendu des travaux de la Société des sciences et lettres de Metz, pour l'année 1827.

101. Les expériences, qui avaient été soumises à cette méthode, avaient été faites à Metz, sur la scierie de M. de Nicéville, mise en mouvement par une roue à aubes courbes, suivant le système de M. Poncelet, capitaine du génie.

Par une première expérience faite sur la machine se mouvant seule, la formule

$$Km(V-v)v, \qquad (1)$$

donne

$$Ks \times 6{,}45\,(6{,}45-3{,}22)\,3{,}22 \times 60, \qquad (2)$$

pour la quantité d'action transmise à la roue pendant une minute (s désignant l'ouverture de la vanne).

Représentant ensuite par x, la quantité d'action que consomme, dans une minute, la machine manœuvrant à vide, quand le châssis fait 90 oscillations par minute; M. Woisard suppose que, sans erreur sensible, $\frac{87}{90}x$ peut désigner la quantité d'action consommée, quand le châssis fait 87 oscillations; et que l'on a

$$Ks \times 6{,}45\,(6{,}45-3{,}22)\,3{,}22 \times 60 = \tfrac{87}{90}x. \qquad (3)$$

Dans la deuxième expérience, où il avait fait manœuvrer la machine en sciant du bois, le châssis faisait 91 oscillations par minute; et s' étant l'ouverture de vanne, on avait, pour la quantité d'action transmise à la roue pendant une minute,

$$Ks' \times 6{,}41\,(6{,}41 - 3{,}37)\,3{,}37 \times 60. \qquad (4)$$

Dans la troisième expérience, il avait trouvé, avec le frein de Prony, et le châssis faisant 90 oscillations, pour la quantité d'action consommée en une minute, par le travail, une valeur de 7960 kilogrammes élevés à un mètre. Et comme la quantité (4) est égale non-seulement à la quantité d'action consommée par la machine, mais encore à celle consommée par le travail, il a donc l'équation

$$Ks' \times 6{,}41\,(6{,}41 - 3{,}37)\,3{,}37 \times 60 = \frac{91x}{90} + 7960. \qquad (5)$$

Divisant l'équation (5) par l'équation (3), il trouve

$$\frac{s'}{s}\left\{\frac{6{,}41\,(6{,}41 - 3{,}37)\,3{,}37}{6{,}45\,(6{,}45 - 3{,}22)\,3{,}22}\right\} = \frac{91x + 7960 \times 90}{87x}. \qquad (6)$$

Il admet encore que les surfaces s et s' sont entre elles comme les ouvertures de vanne ou représentées par

$$\frac{s}{s'} = \frac{106}{60}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (6), il trouve enfin

$$x = 12\,148. \qquad (7)$$

Ainsi, pour faire marcher la machine à vide, de manière que le châssis fasse 90 oscillations par minute, il faut dépenser, par

minute, une quantité d'action égale à celle qui est nécessaire, pour élever, à un mètre de hauteur, un poids de 12 148 kilogrammes.

Dans les deux dernières expériences, la masse d'eau, dépensée, par minute, était la même, ainsi que la vîtesse V; et il pense que les vîtesses v sont trop peu différentes pour que l'on ait besoin de tenir compte de la différence qui existe entre les quantités d'action transmises à la roue. Il suppose en conséquence l'identité de ces quantités, et il égale entre elles les quantités d'action consommées. Si l'on désigne donc par y la quantité d'action consommée par le sciage dans la seconde expérience, on aura l'équation

$$x+y=\frac{91}{90}x+7960. \qquad (8)$$

Remplaçant x par sa valeur tirée de l'équation (7), on aura encore la valeur

$$y=8095^{\text{k.m}},$$

pour la quantité d'action consommée par le travail des quatre lames; et la valeur $2016^{\text{k.m}}$ pour celle d'une seule lame, quand cette lame débite du chêne sec de 0,315 d'épaisseur, que le châssis fait 90 oscillations par minute, et que le chariot avance de 1,158 millimètres à chaque oscillation du châssis.

102. Si l'on veut connaître la quantité d'action consommée par le sciage d'un mètre carré, on remarquera que la surface, débitée pendant 15 minutes, a été de $4 \times 0,315 \times 1,567$ mètres carrés, que la quantité d'action consommée dans le même temps a été 15×8095, et que par conséquent la quantité d'action, consommée par le sciage d'un mètre carré, est

$$\frac{15 \times 8095}{4 \times 0,315 \times 1,567}=61500,$$

c'est-à-dire, de 61500 kilogrammes élevés à un mètre.

103. Tel est le résumé succinct de la méthode donnée par M. Woisard, et que nous n'avons altérée en rien. Mais on a pu s'apercevoir que la première erreur de cette formule provient de ce qu'il fait varier la quantité d'action consommée par la machine se mouvant seule comme la simple vitesse au lieu de la faire varier comme le carré de la vitesse, cette erreur lui est commune avec presque tous les mécaniciens, quoique Borda ne la partage pas dans son travail sur la résistance de l'air. En faisant cette correction la formule (6) devient

$$\frac{s'}{s}\left\{\frac{6,41(6,41-3,37)3,37}{6,45(6,45-3,22)3,22}\right\}=\frac{(91)^2x+7960\times(90)^2}{(87)^2x},$$

et donne pour x, la valeur 15308, assez différente de celle 12148.

De même l'équation (8) donne $y=8302$.

Et la force consommée par le sciage d'un mètre carré sera 63071 kilogrammes élevés à un mètre.

Comme la résistance, que l'air oppose au mouvement de la machine, augmente comme le carré de la vitesse, elle sera comprise dans la quantité d'action consommée par la machine, et on n'a pas besoin d'y avoir égard; d'ailleurs la résistance de l'air est une petite fraction de la résistance totale.

Malgré cette rectification, l'équation (8) se fondant sur l'identité de deux quantités d'action transmises à la roue, donnera lieu à de grandes erreurs dans la plupart des cas, et il importe d'y substituer une autre méthode.

De la quantité d'action consommée par la roue tournant seule et de celle utilisée.

104. Dans les expériences faites avec le frein, pour obtenir la force totale utilisée par le récepteur, il faut ajouter à la force donnée

par le frein, celle consommée par le frottement de la roue se mouvant seule; quoique nous ayons vu, que, d'après le principe d'homogénéité, une roue tournant seule dépensait une quantité d'action qui augmentait comme le carré de la vitesse; la détermination du coéfficient de la force consommée par le frottement n'est pas d'une exécution facile, car elle dépend du rapport de la force utilisée par le récepteur à la force consommée. Ainsi, le rapport de la force utilisée par le récepteur à la force consommée, et le coéfficient du frottement dépendent l'un de l'autre, et nous jettent dans un cercle vicieux qui, si l'on négligeait l'un des deux, pour faciliter la détermination de l'autre, pourrait conduire souvent à des conclusions qui s'écarteraient beaucoup de la vérité.

105. Nous nous proposons à présent de montrer comment, par une méthode de substitutions et de rectifications successives, et en partant de suppositions faites, pour ainsi dire, à volonté, on peut être ramené à déterminer le véritable coéfficient de la force consommée par le frottement, et le rapport exact de la force utilisée à la force dépensée dans le cas du maximum d'effet.

Avant que d'entrer en matière, nous avertirons que, dans nos premiers calculs, nous avions fait le coéfficent de la contraction égal à 0,63; mais que des raisons particulières nous ont engagé à les refaire et à nous servir du coéfficient 0,66, qui se rapproche davantage des dernières expériences faites à ce sujet.

Pour faire la première supposition relative au coéfficient de la force consommée par le frottement, nous avons divisé la résistance, provenant du frottement rapporté au centre d'action ou d'impulsion, par le double du coéfficient de la gravité. Le coéfficient ainsi obtenu est loin du véritable, puisqu'il donne une force, consommée par le frottement, contenue dans la sixième colonne du quatrième tableau, environ dix fois moindre que la quantité d'action réduite, dépensée par le moteur. Cependant cette valeur de la

force, consommée par le frottement, ajoutée à la force reçue par le récepteur et indiquée par le frein, donne 0,4478 pour le rapport de la force totale utilisée à la force dépensée.

Pour obtenir une première rectification, nous diviserons la force dépensée réduite, contenue dans la huitième colonne du quatrième tableau, par le carré de la vitesse de la roue; ce qui nous donnera les nombres contenus dans la neuvième colonne. Multipliant encore ces nombres par 0,4478, rapport de la force utilisée à la force dépensée, nous aurons les nombres contenus dans la treizième colonne, qui exprimeront les coéfficiens du frottement déduits de la force utilisée. La dixième colonne contient les coéfficiens du frottement divisés par $2g$ et déduits directement de la théorie des frottemens. Ces coéfficiens sont loin d'être proportionnels à ceux de la treizième colonne, ce qui ne doit pas paraître étonnant puisque nous n'avons pas eu égard au frottement engendré par la pression de la force motrice, qui est assez considérable; et que le coursier circulaire, pris depuis son origine jusqu'au point qui se trouve dans la même verticale que l'axe, forme un arc de quarante-trois degrés.

Pour en tenir compte, nous multiplierons la force utilisée par le sinus de quarante-trois degrés, et par le rayon du tourillon, et nous diviserons ce double produit par le double du produit du rayon du centre d'action et du coéfficient de la gravité; en ajoutant ce coéfficient à celui provenant du poids de la roue, on aura une quantité qui, prise pour diviseur du coéfficient réel de la quantité d'action réduite et dépensée par la roue, donnera des quotiens qui pourront être regardés comme identiques, et auront pour moyenne 4,688. Ces résultats sont contenus dans les cinq premières colonnes de la suite du quatrième tableau.

En nous servant de ce quotient pour multiplier le coéfficient de la somme du frottement, rapporté au centre d'action, et divisé par $2g$, nous aurons une quantité qui, multipliée par le carré de

la vitesse du centre d'action, nous donnera une quantité d'action, qui, ajoutée à celle fournie par le frein, exprimera la force totale utilisée par la roue. Divisant cette dernière par la quantité d'action dépensée, nous aurons les rapports de la dixième colonne du cinquième tableau, qui ont pour moyenne 0,4981.

Nous servant de ce nouveau rapport de force utilisée, pour rectifier le coéfficient de la force consommée par la roue tournant toute seule, nous trouvons le quotient moyen 0,5169, qui, employé pour rectifier à son tour le rapport de la force utilisée à la force dépensée, donne le rapport moyen 0,5078.

106. Cherchons à découvrir à présent ce qu'exprime le quotient moyen 0,5169, si nous n'avions pas divisé par $2g$ la somme du frottement provenant et du poids de la roue et de la pression de la force motrice, au lieu du quotient 0,5169 ci-dessus, nous aurions trouvé 5,169 divisé par $2g$, ou 0,2635; et même cette quantité différerait très-peu d'un quart si, au lieu de prendre pour le coéfficient du frottement deux quinzièmes, quantité moyenne entre un septième et un huitième assignés par Coulomb, nous avions choisi quatre vingt-neuvièmes; ainsi en adoptant ce dernier coéfficient du frottement, nous pourrons dire que la quantité d'action, consommée par notre roue allant à vide, est le quart de celle obtenue en multipliant le frottement total rapporté au centre d'action de la roue par le carré de la vitesse de ce même centre d'action. Par l'adoption de ce coéfficient du frottement, le rapport 0,5078 de la force utilisée à la force dépensée deviendra un peu plus petit et s'approchera beaucoup de celui 0,50; et on pourra dire que dans notre roue la force utilisée est la moitié de celle dépensée.

107. La force vive déterminée par le produit du coéfficient du frottement rapporté au centre d'impulsion, et du carré de la vitesse de ce même centre est quadruple ici de la force consommée par le frottement. Si l'on ne peut avoir recours à l'expérience pour

connaître le véritable rapport, ce qui est d'ailleurs impossible toutes les fois qu'il s'agit d'un projet, on pourra prendre le rapport précédent, quand il faudra calculer la force consommée par les frottemens dans des cas où les centres d'impulsion et les centres d'action des engrenages et les masses inertes qui composent les organes, pourront être censés être situés d'une manière semblable à celle ci-dessus. Dans la suite que nous ferons à cet ouvrage, nous donnerons des règles mieux définies et plus claires pour calculer directement ce coëfficient du frottement, et satisfaire à la plus grande partie des questions que l'on peut se proposer à son égard.

108. Si, dans nos expériences sur le frein, on réduit les rapports de force utilisée pour les ramener au cas du maximum d'effet, on aura un peu moins d'exactitude qu'auparavant. Mais la différence sera peu considérable, et ne devra pas étonner, vu la difficulté des expériences de ce genre, et l'irrégularité de notre arbre. Au reste, on peut conclure des rapports des erreurs, qu'en faisant les expériences avec le frein de M. Prony, on sera presque toujours sûr que le résultat obtenu ne différera pas du véritable, de plus d'un dix-septième, et que cette précision augmentera avec le nombre des expériences.

De la quantité d'action consommée par la scierie se mouvant seule sans scier du bois.

109. Pour trouver la quantité d'action consommée par la scierie se mouvant seule sans scier du bois, nous observerons que la vîtesse des différens organes de la machine, à l'exception du récepteur, est proportionnelle, non à la vîtesse du centre d'impulsion de la roue motrice, mais à la vîtesse angulaire de cette roue. Quoique ces deux espèces de proportionnalités ne soient pas très-différentes entre elles, il vaut mieux pourtant les distinguer, et séparer la quantité d'action consommée par la roue seule de celle consommée par le reste de la machine.

110. Les huitième et neuvième colonnes du septième tableau contiennent les résistances ou pressions de la force motrice et du poids de la roue rapportées au centre d'impulsion; et nous avons vu, qu'en multipliant la somme de ces dernières, par le carré de la vîtesse du centre d'impulsion, on obtient une force quadruple de celle consommée par le frottement, qui est contenue dans la dixième colonne. Retranchant à présent les résultats de cette dernière colonne, de la force utilisée réduite, contenue dans la septième colonne, nous aurons la force consommée par le reste de la machine. Cette dernière force, divisée par le carré de la vîtesse angulaire mesurée pendant une seconde, donne les résultats contenus dans la dernière colonne, et qui sont les coéfficiens d'homogénéité de la force consommée par le reste de la machine.

111. Dans notre tableau, les expériences, faites dans le mois de septembre, présentent sur-tout, dans le commencement, des coéfficiens d'homogénéité très-forts. La raison en est toute simple, et provient du renouvellement récent de tous les alluchons de la roue dentée, et de ce que la machine avait fonctionné très-peu à cause de la sécheresse et du manque d'eau. Aussi, nous a-t-il fallu attendre, au mois d'octobre, pour continuer nos expériences; alors les coéfficiens ont peu varié, et on peut les regarder comme constans et égaux à 898.

112. Le frottement occasionné par la force motrice, ayant peu influé sur les résultats; et la différence, entre les rapports des vîtesses du centre d'impulsion et des vîtesses angulaires, n'étant pas trop considérable; nous avions supposé les vîtesses de tous les organes, proportionnelles aux vîtesses du centre d'impulsion; de cette manière le coéfficient d'homogénéité de toute la machine se mouvant seule s'est trouvé 9,08, et l'erreur moyenne même n'a pas augmenté sensiblement.

113. La lanterne de la scierie a 15 fuseaux et la roue a 48 dents,

ce qui donne un rapport de vîtesse 3,2; voyons, par aperçu, quelle pourrait être l'influence, sur la force utilisée par le travail, si nous prenions un rapport de vîtesse plus considérable, par exemple, dix fois plus grand. Le poids de la roue hydraulique occasionne, à l'endroit des tourillons, un frottement d'environ 480,8, qui multiplié par 0,072 diamètre des tourillons, et divisé par 3,80 diamètre moyen du centre d'impulsion, donne pour le frottement rapporté au centre d'impulsion 9,11; le quart de cette dernière quantité (99) donnera le coéfficient 2,28 de la force consommée par le frottement de la roue toute seule, sans y comprendre celui provenant de la pression de la force motrice. Cette quantité 2,28 ôtée de celle 9,08 donnera 6,8 pour le coéfficient de la force consommée par les frottemens du reste de la machine, à l'exception du récepteur; et pour le coéfficient de la force consommée par la force vive perdue, à cause des chocs et des à-coups des différens organes entre eux. Si on voulait à présent, que la scie eût une vîtesse double, on pourrait l'obtenir de deux manières: ou en communiquant à l'arbre de la roue, une vîtesse double, ou bien en conservant à cette dernière la même vîtesse, mais en doublant celle de la lanterne. Dans le premier cas de cette nouvelle disposition, la force consommée par les frottemens serait quadruple de celle consommée par la disposition primitive ou égale à 36,32; dans le second cas où l'on ne changerait pas la vîtesse de la roue hydraulique, le frottement de cette dernière ne consommerait qu'une force équivalente à 2,28; mais la force, consommée par le reste de la machine, serait égale à quatre fois 6,8 ou à 27,2; ce qui donnerait 29,48 pour la totalité du coéfficient de la force consommée par le frottement de la machine dans le second cas, en supposant que la situation respective des masses inertes qui composent les différens organes, n'est pas altérée par cette nouvelle disposition. Ainsi, quand la vîtesse, avec laquelle la scie doit opérer, sera fixée, il y aura de l'avantage à diminuer

la vitesse des organes les plus éloignés de l'opérateur, et à accroître la rapidité de ceux qui en sont les plus rapprochés.

114. M. Navier attribue, à la force vive perdue par les chocs et les à-coups de la scierie, pour diminuer la force utilisée, une plus grande influence qu'à la force consommée par les frottemens. En rendant compte des données de Belidor, relatives à la scierie de la Fère (pag. 510), il évalue la quantité d'action, transmise au récepteur, égale à 342 kilogammes élevés à un mètre; la quantité, utilisée par le travail, à 114, la quantité de force, consommée par les frottemens, au huitième de la quantité d'action transmise, ce qui donne 43; et les 185 kilogrammes restans, il les attribue à la force vive perdue par les à-coups et les changemens brusques de vitesse. Ainsi il fait la perte de force vive occasionnée par les chocs et les variations de vitesse, quintuple de la force consommée par les frottemens. La machine que nous avons examinée, est, à peu de chose près, la même que celle décrite par Bélidor, et ne peut pas être en meilleur état, parce que les différens organes et les différentes pièces qui la composent, sont vieux et usés et ont besoin d'être renouvelés au plus tôt; c'est ce qui a été dit au ministère dans le projet que la commission a exécuté. Nous savons déjà que le coéfficient de la force, consommée par le frottement de la roue se mouvant seule, est égal à 2,28; et qu'il ne reste que 6,8. pour le coéfficient de la force, consommée par les frottemens du reste de la machine, et le coéfficient de la force vive perdue à cause des chocs et des variations de vitesse instantanées.

Le poids de la lanterne avec son arbre est de 348,51 kilogrammes; les deux quinzièmes donneront le frottement rapporté à la circonférence des tourillons, ou 46,47; multipliant ce dernier nombre par 0,07 diamètre des tourillons, et divisant par 0,633 diamètre du centre des fuseaux de la lanterne, nous trouverons 5,14, pour le frottement rapporté au centre des fuseaux. En supposant que

les différentes masses inertes aient dans la lanterne une situation aussi favorable que celle de la roue hydraulique, nous aurons, en divisant 5,14 par quatre, 1,28 pour le coéfficient de la force consommée par le frottement de la lanterne, rapporté au centre d'action des fuseaux. Pour ramener ce coéfficient, à ce qu'il serait, s'il était rapporté au centre d'impulsion de la roue, il faut le multiplier par 0,95 rayon du rouet, et le diviser par 1,90 rayon moyen du centre d'impulsion; et on aura ainsi, 3,17 pour le coéfficient de la somme des frottemens de la roue hydraulique et de la lanterne. Ainsi les frottemens de la roue hydraulique et de la lanterne consomment seuls une force qui est plus que le tiers de celle non utilisée par le travail, quoique transmise à la roue. Si à présent, nous tenions compte de celle consommée par les frottemens des tourillons de la manivelle, et de la bielle; par les frottemens du châssis de la scie et des autres organes de la machine; par les frottemens des dents du rouet contre les fuseaux de la lanterne; et si nous considérions, en outre, la décomposition de force occasionnée par la direction oblique de la bielle par rapport à celle du châssis; on n'hésitera pas à penser que la perte de force vive, occasionnée par les à-coups, bien loin d'être quintuple de la perte de force consommée par les frottemens, est même inférieure à cette dernière.

De la force consommée par le sciage du bois.

115. Pour trouver la force consommée par le sciage du bois, on suppose ordinairement que la force, consommée par les frottemens des différens organes de la machine, reste le même, soit que la machine manœuvre à vide, soit qu'elle manœuvre en sciant du bois: supposition que l'on peut admettre sans grande erreur; car dans l'instant où la scie est élevée, c'est comme si elle manœuvrait à

vide; et la force, dépensée par le sciage, ne se fait sentir, sur les frottemens, que lors de la descente. Ainsi, en retranchant de la force totale utilisée par le récepteur, celle consommée par les frottemens de la machine comme si elle manœuvrait à vide, il restera la force utilisée et consommée par le travail du sciage. Pour savoir si cette force, consommée par le sciage, suit la proportion de la simple vîtesse ou du carré de la vitesse, représentons-nous une scie horizontale telle que celles qui sont communément en usage pour scier la pierre, et où la scie n'agit pour opérer son travail que par son propre poids. L'homme qui la conduit, ne fait en donnant à la lame de scie un mouvement horizontal, que promener le même point de la lame de scie sur divers points de la pierre soumise au sciage. La descente de la lame de scie est proportionnelle à l'espace parcouru par un point quelconque de cette lame, ainsi elle est proportionnelle à sa vîtesse. Si la pierre soumise à l'expérience était très-tendre, et que le sciage ne fût que l'effet de la descente verticale de la scie, on pourrait la regarder comme entièrement semblable à l'action d'un poids, qui, facilité par la pesanteur, ferait mouvoir un treuil; et elle serait par conséquent proportionnelle à la simple vîtesse. Ce raisonnement ne paraît pas concluant d'abord, parce que l'on voit, au premier aperçu, que la lame de scie n'opère en descendant que par le moyen du mouvement horizontal; et que le mouvement horizontal ne peut opérer, à son tour le sciage, que par le concours du mouvement vertical. Si ces deux mouvemens, qui n'ont pas des directions opposées, mais seulement des directions transversales, concouraient également au sciage, et suivaient indentiquement les mêmes lois, tout serait prouvé; car la lame de scie, pour opérer le sciage, consommerait alors une quantité d'action proportionnelle à la simple vîtesse. Quoique les deux mouvemens de la lame de scie soient également nécessaires à l'exécution du sciage, ils sont, par l'effet de leurs

différentes directions, indépendantes l'une de l'autre, et ne dépendent entièrement que de la qualité et de la dureté de la pierre ou de la matière à diviser. Ainsi, par le principe d'homogénéité et de similitude, ces deux mouvemens suivent exactement les mêmes lois.

116. La force, consommée par le sciage du bois, qui était de l'orme coupé au commencement de l'année, se trouve dans la dixième colonne du neuvième tableau. En divisant ces résultats par la vîtesse angulaire, nous aurons les coéfficiens d'homogénéité contenus dans la onzième colonne, qui seraient identiques et conformes à la théorie que nous venons d'exposer, si l'épaisseur du bois n'avait pas varié. Comme il n'y a aucun doute que les forces consommées ne croissent comme les épaisseurs du bois, on aura, en divisant par les épaisseurs, les résultats de la onzième colonne, des coéfficiens d'homogénéité qui correspondront avec l'espace parcouru par le chariot, pendant un tour de roue, et avec un arbre d'orme qui serait de l'épaisseur d'un mètre. Le coéfficient ainsi déterminé aura une valeur de 1304 qui exprimera la quantité d'action consommée pendant un tour de roue, et dont l'erreur moyenne ne sera pas tout-à-fait égale à un neuvième. Le chariot s'avançant, à chaque tour de roue, de 8 millimètres, la force consommée pour scier un mètre carré, sera égale à 1304 multiplié par 1000, et divisé par huit, ou à 163000 kilogrammes élevés à un mètre. Cette quantité paraîtra très-considérable, mais cela n'étonnera plus, quand on saura que le trait de scie, fait par nos lames, est de huit millimètres, tandis que, dans les scieries ordinaires, avec les lames de scie de commerce, ce trait n'a que trois à quatre millimètres d'épaisseur. C'est l'épaisseur ordinaire du trait dans la scierie de M. de Nicéville, pour laquelle, M. Woisard, en sciant un mètre carré de chêne sec, a trouvé qu'il était nécessaire d'employer une force équivalente à 61500 kilogrammes élevés à un mètre; quantité qui doit être même portée

à 63071, quand on fait, à sa méthode, les rectifications nécessaires. Le chêne présentant moins de résistance que l'orme, on trouvera que cette dernière évaluation ne diffère pas beaucoup de la nôtre, qui donnerait, pour un trait de scie de l'épaisseur de trois millimètres et demi, une consommation de force égale à 71312 kilogrammes élevés à un mètre.

117. Nous remarquerons ici que, pour faire des expériences exactes sur différentes scieries et différentes lames, il vaudrait mieux prendre, pour point de comparaison, le poids de la sciure; et cette dernière modification ne changerait rien à l'importance et à la bonté de la surface carrée qui pourrait servir de terme de comparaison, toutes les fois que l'épaisseur du trait resterait la même.

118. Si, au lieu de supposer la vitesse des différens organes de la machine et la vitesse du chariot proportionnelles à la vitesse angulaire du récepteur, nous les avions supposées proportionnelles à la vitesse du centre d'impression de la roue hydraulique, il aurait fallu prendre 9,08 pour le coéfficient d'homogénéité de la force consommée par la machine, et on aurait trouvé que 116,4 serait la valeur du coéfficient d'homogénéité de la quantité d'action consommée par le sciage, et que l'exactitude ainsi obtenue, serait toute aussi grande, quoique l'on eût négligé de tenir compte de la pression occasionnée par la force motrice. Mais il serait assez long et assez difficile d'y avoir égard; comme les pressions provenant de la force motrice et de la résistance agissent presque toujours en sens opposés, il se fait ordinairement une espèce de compensation, non-seulement pour un seul organe, mais aussi pour tous les autres; et la négligence de cette cause n'entraîne pas dans une grande inexactitude, sur-tout si les organes de la machine sont un peu multipliés.

119. La force, consommée par le travail, proportionnelle à la simple vîtesse, se rencontre aussi dans d'autres machines, mais souvent par une cause différente, analogue à celle d'une roue hydraulique par rapport à un courant.

Remarques générales sur les scieries.

120. Nous nous sommes trop étendus sur le sujet des scieries pour ne pas faire ici un résumé succinct de ce que nous avons déjà vu, rassembler plusieurs remarques intéressantes, et présenter plusieurs rapprochemens qui pourront être utiles à ceux qui voudront établir des scieries ou d'autres machines analogues.

M. Hassenfratz, dans son traité de l'art de la charpente, assure que les hommes exercent un effort de 13 kilogrammes, qu'ils parcourent, à chaque coup, un espace de 0,8, et donnent 50 coups par minute, avec une durée de travail de douze heures. Ainsi, $13 \times 0{,}8 \times 50 \times 60' \times 12$, donne la quantité d'action journalière égale à 376000 kilogrammes élevés à un mètre. D'après Bélidor, un homme peut produire en une minute, dans du chêne vert, un trait de scie dont la surface est de 0,00586 mètres carrés; et d'après M. Hassenfratz, cette surface est de 0,006 mètres carrés, ce qui n'en diffère pas sensiblement. D'après ce qui précède, les scieurs de long dépensent, par minute, une quantité d'action égale à 520 kilogrammes; et l'exécution d'un trait de scie d'un mètre de surface exige 86667 kilogrammes : évaluation qui est plus considérable que celle que nous avons trouvée. M. Navier la réduit à moitié, en se fondant sur ce que les scies, employées par les scieurs de long, ne pèsent que 6,5 kilogrammes; mais en rapprochant ces données de celles trouvées par M. Woisard et par nous, l'estimation de la force dépensée donnée par M. Navier devrait être portée à moitié en sus environ; et, au lieu d'être équivalente à 260 kilogrammes, elle devrait l'être à 380 kilogrammes.

Bélidor a reconnu que trois hommes, appliqués à une scie, deux en bas et un en haut, peuvent scier 120 pieds carrés d'une pièce de bois de chêne vert en 12 heures, travail d'une journée; chacun

de ces hommes scie donc 4,22 mètres carrés par jour, et en les multipliant par 63333 force donnée par les expériences de M. Woisard, il résulte que l'action, produite par chaque ouvrier, est de 267265, environ moitié en sus de celle donnée par M. Navier.

Cette donnée peut être très-utile pour évaluer la quantité d'action dépensée par le sciage de différens matériaux; ainsi, d'après M. Morisot, un trait de scie d'une toise carrée, fait dans la pierre de roche, exigeant 72 heures du travail d'un ouvrier, donne par minute une surface de 0,0008795 mètres carrés; et puisque l'ouvrier fournit par minute une quantité d'action de 380 kilogrammes élevés à un mètre, l'exécution d'un trait de scie d'un mètre carré, dans cette pierre exigera une quantité d'action de $\frac{380}{0,0008795}$ ou de 432040 kilogrammes élevés à un mètre.

121. J'ajouterai ici, d'après M. Morisot, le nombre d'heures nécessaires au sciage d'une toise carrée des matériaux suivans :

	heures
Lambourde (pierre calcaire des environs de Paris, fort tendre, d'un grain grossier, pesanteur spécifique 1,6)....	4,5.
Pierre franche (pierre calcaire moyennement dure, d'un grain égal, pesanteur spécifique 2,2)..................	45.
Pierre de roche (pierre calcaire assez dure et un peu coquilleuse, dont la pesanteur spécifique est 2,3)..........	72.
Liais (pierre calcaire d'un grain plus égal et plus fin que la roche, pesanteur spécifique 2,4)..................	67.
Albâtre des Pyrénées (le plus tendre des marbres)....	56.
Marbre blanc statuaire....................................	72.
Granit gris de Normandie................................	504.
Granit gris des Vosges....................................	700.
Porphyre rouge et vert....................................	1177.

Autre table de la dureté des pierres pour résister au sciage d'après Rondelet.

Pierre de Liais	0,86
Marbre blanc veiné	1,
Id. bleu turquin	1,28
Granit gris de Normandie	6,4
Id. autre qualité	7,5
Granit de Bretagne	8,6
Granit gris des Vosges	9,3
Id. feuille morte, *id*	9,7
Id. vert *id*	10,6

D'après Bélidor, en comparant la quantité du chêne vert sciée dans un certain temps, à celle du chêne parfaitement sec, on trouve 0,67

Du bois blanc vert 1,40

Du bois blanc dur 1,24

122. L'orme exigeant pour le sciage d'un mètre carré de surface avec un trait de scie de 8 millimètres d'épaisseur, une force de 163000 kilogrammes élevés à un mètre; cette même surface avec un trait de scie d'un millimètre n'exigera que 20375. D'après les données de MM. d'Hassenfratz, Navier et Woisard, le chêne moyennement vert, n'exigera que les onze douzièmes de cette force, ou seulement 18677 kilogrammes élevés à un mètre. Dans le cas de l'orme, la force consommée par chaque tour de roue, sera le huitième de 1304 ou 164, et dans le second cas celui du chêne que 150; les quantités de force précédentes varieront dans le même rapport que le nombre des millimètres contenus dans le trait de scie. Le nombre des tours de roue, nécessaires au sciage d'un mètre

carré, sera 125, quand l'épaisseur de l'arbre ou de la pièce de bois, soumise au sciage, sera d'un mètre. Ce nombre de tours est, en raison inverse de l'épaisseur, en supposant que le pied de biche et la roue à crémaillère ne font avancer le chariot constamment que de la même quantité de huit millimètres par tour de roue. Nous avons vu que le travail d'un scieur de long est équivalent à 380 kilogrammes par minute; et qu'il faut environ, au scieur de long, 53,6 minutes pour le sciage d'un mètre carré d'orme, et 49,1 pour celui d'un mètre carré de chêne moyennement vert. La scierie de l'arsenal faisant environ 18 tours par minute, elle fera, dans le même temps, environ 7 à 8 fois plus d'ouvrage qu'un scieur de long.

123. Le temps que la scie ordinaire à mouvement alternatif emploie à monter, est à peu près égal à celui qu'elle met à descendre, et est entièrement perdu pour le sciage. La scie circulaire, ayant un sciage continu, ne consomme que la moitié du temps; mais ce n'est pas le seul avantage dont elle jouit sur celle à mouvement alternatif, et qui lui feront mériter la préférence toutes les fois que l'épaisseur des pièces à scier pourra le permettre.

1°. Le chariot, portant la pièce à scier, devant presser continuellement et d'une manière constante contre la lame de scie, pourra être mu indépendamment de la scie au moyen d'un contre-poids; ce qui aura l'avantage inappréciable de faire avancer la pièce de bois, en raison de la dureté du bois; avantage que les scieurs de long possédaient seuls; 2°. les organes de la scie n'ayant pas un lourd châssis à soulever, pourront être réduits au moindre poids, de manière à diminuer le plus possible la pression exercée sur les axes et la force consommée par les frottemens. Les scies circulaires, employées par M. Roguin, de 12 à 18 pouces de diamètre, font 700 tours par minute; et celles de 18 à 30 pouces de diamètre font 500 tours par minute, et scient des madriers de 8 à 9 pouces d'épaisseur.

Trouver la vitesse de la roue ou l'ouverture la plus favorable pour donner le maximum de force utilisée par le travail.

Il est tout naturel de comparer la quantité d'action dépensée par le moteur à celle économisée par le récepteur ou utilisée pour le travail. Il est aussi très-simple de regarder comme la meilleure, la disposition qui donne le rapport le plus grand.

124. Nous avons vu que dans beaucoup de machines, la force consommée par le frottement des différens organes de la machine croissait comme le carré de la vitesse, tandis que celle consommée par le travail ne croissait que comme la simple vitesse. La différence de ces deux lois fait d'abord conclure, au premier aperçu, que le maximum de quantité d'action reçue par le récepteur, n'a pas lieu dans les mêmes circonstances que celles qui donnent le maximum de la quantité utilisée pour le travail. Ce dernier s'obtient avec une vitesse de moteur moindre que dans le premier cas, et il est aussi le plus important pour les praticiens et les entrepreneurs. On pourrait chercher à le déduire des données générales, et à en représenter les principales circonstances par des formules; mais on serait peut-être amené à des calculs incompréhensibles à la plupart des lecteurs, et dont les résultats seraient dans la plupart des cas plus curieux qu'utiles. Nous laisserons ces soins à d'autres, et nous ferons voir, comment, par des interpolations et des moyennes arithmétiques, on peut parvenir au même but: celui de dresser une table, qui fasse connaître ces maximum dans la plupart des cas, et qui même donne ensuite, par la comparaison des différens résultats, des règles approximatives assez générales pour guider le praticien dans toutes les questions qu'il peut se proposer ou avoir besoin de résoudre.

125. Supposons qu'il s'agit d'une usine mue par une roue de

4 mètres de diamètre et construite à aubes courbes suivant le système de M. le capitaine du génie Poncelet. Supposons en outre que cette roue utilise dans le cas du maximum d'effet 60 pour cent de la force motrice; que la longueur de la base du pertuis soit 0,70, et le coéfficient de la contraction 0,67; que l'on ait en outre 10 pour le coéfficient de la force consommée par la machine marchant à vide, et 20 pour celui de la force consommée par le travail, et une chute de 2 mètres.

D'après ces données nous construirons d'abord une première table subsidiaire (tableau 10e), qui fera connaître, pour chaque vîtesse de la circonférence extérieure, portée dans la première colonne, la force consommée par la machine, inscrite dans la seconde, et celle utilisée pour le travail, contenue dans la troisième colonne; enfin la quatrième colonne et la dernière donneront la force totale consommée par la machine et par le travail.

Le second tableau subsidiaire (tableau 11e) fera connaître, pour chaque ouverture de vanne contenue dans la première colonne, la vîtesse moyenne de l'eau, sortant du pertuis, inscrite dans la seconde colonne; la troisième colonne et la quatrième contiendront l'une la force motrice consommée, et l'autre la force motrice utilisée, dans le cas où le récepteur aurait la vîtesse du maximum.

Quand la circonférence extérieure de la roue hydraulique a une vîtesse de deux mètres, le dixième tableau donne une force consommée totale utilisée par le récepteur de 80; il faut trouver au moyen de la onzième table, quelle est l'ouverture de vanne, capable de donner cette quantité d'action 80 utilisée par le récepteur. Voyons d'abord si 0,025 ne sera pas cette ouverture. Le centre d'impression aura pour rayon deux mètres moins la moitié de 0,025 ou 1,9875; multipliant la vîtesse de la circonférence extérieure par le rapport de 1,9875 à 2,000 on aura la vîtesse moyenne 1,9875 du centre d'impression.

Le rapport de la vîtesse moyenne du centre d'impression à la

vitesse moyenne de l'eau 6,244 sera 0,3183, en nous servant de la formule $4(1-r)r$ pour réduire la force utilisée dans le cas du maximum à la force utilisée réduite du cas particulier considéré, nous aurons $4 \times 0,3183 \times 0,6817 = 0,8679$; et 0,8679, multiplié par 87,3 force utilisée par la roue et donnée par le 11[e]. tableau donnera 75,765 pour la force réduite utilisée par la roue hydraulique. Faisant le même calcul avec l'ouverture de vanne 0,030, la vitesse du centre d'impression sera 1,985; et nous aurons pour réduire la force utilisée 104,6, dans le cas du maximum, à celle du cas considéré, au lieu de 0,8679, seulement 0,8677. Ainsi l'on voit que la différence est très-petite, et que cette observation servira dans beaucoup de cas à abréger les opérations. La force utilisée réduite sera, en conséquence de cette valeur, égale à 90,780; et l'ouverture de vanne cherchée, sera donc comprise entre celle 0,025 et celle 0,030; pour la déterminer plus exactement, il faut remarquer que la différence entre 80 et 75,765 est 4,235; et que celle entre 75,765 et 90,78 est 15,015; le rapport de ces deux différences est 0,2811, et 0,2811 multiplié par 0,005 donne 0,00141; par conséquent l'ouverture de vanne cherchée est 0,02641. Si l'on croyait que cette première valeur ne fût pas assez approchée, on referait les mêmes opérations en se servant des ouvertures de vanne 0,02641 et 0,025 comme l'on s'est servi de celles 0,025 et 0,030, et on aurait une valeur plus exacte. Mais dans la plupart des cas une première opération suffira. Pour avoir la force consommée avec l'ouverture de vanne 0,02641, on multipliera la différence de 145,5 à 174,3 ou 28,8 par 0,2811, et on aura 8,60 à ajouter à 145,5; ce qui donnera la quantité d'action consommée égale à 153,60; et divisant enfin 40 par 153,60, on aura 0,2604 pour le rapport de la force utilisée par le travail à celle totale reçue et consommée par le récepteur.

126. En continuant de la même manière pour d'autres vitesses de la circonférence extérieure de la roue hydraulique, on dressera le

12e. tableau qui donnera les rapports des quantités d'action utilisée par le travail, dans le cas où l'on se servira d'une roue hydraulique à aîles courbes, et où l'on aura en outre les données suivantes :

- 0,60 Rapport de la force consommée à celle utilisée par le récepteur.
- 0,70 Mètres base du pertuis.
- 0,67 Coéfficient de la contraction.
- 10 Coéfficient de la force consommée par la machine.
- 20 Celui de la force consommée par le travail.
- 2 Mètres hauteur de la chute.

127. Ce 12[e]. tableau fait voir que le rapport maximum de la force utilisée par le travail est 0,2605, ce qui arrive quand la vîtesse de la circonférence extérieure de la roue hydraulique est comprise entre 2,0 et 2,1 ; et que le rapport des vîtesses de la roue et de l'eau motrice est de 0,33 environ; ainsi ce rapport est bien inférieur à celui 0,50 qui donne le maximum de la force utilisée et reçue par le récepteur d'après la théorie.

128. En opérant de même pour d'autres coéfficiens d'homogénéité ou d'autres hauteurs de chute, nous arriverons à dresser le 13[e]. tableau qui donne les différens maximum pour tous les cas que peut présenter une roue à aubes courbes utilisant 60 pour cent de la force motrice. Nous ajouterons en outre que la base du pertuis a 0,70 mètres de largeur, et que le coéfficient de la contraction est supposé de 0,67.

Le 13[e]. tableau donne pour chaque hauteur de chute et chaque coéfficient d'homogénéité, la vîtesse moyenne de la roue, et celle de son centre d'impulsion; la quantité d'action consommée par la machine et celle consommée par le travail; le rapport de la force utilisée par le travail à la force dépensée par le moteur; et enfin le rapport de la vîtesse moyenne du centre d'impulsion de la roue à la vîtesse moyenne de l'eau motrice.

129. Avec la même hauteur de chute, si on laisse constant le rapport du coéfficient de la force consommée par la machine au coéfficient de la force utilisée par le travail, on voit que la vîtesse moyenne de la circonférence extérieure de la roue reste constant; et que le rapport de la force utilisée par le travail à la force totale dépensée, s'il n'est pas constant, du moins varie très-peu.

Ce tableau fournirait plusieurs remarques intéressantes, mais comme ce ne serait que des analogies qui ne présenteraient rien d'officiel, c'est-à-dire aucun de ces caractères qu'impriment ordinairement les démonstrations géométriques, nous les négligerons, quoiqu'elles pussent faciliter les applications du tableau précédent aux cas nombreux de la pratique. D'ailleurs chaque manufacturier, en dressant un tableau semblable pour son usine, pourra les faire aisément lui-même. Nous nous contenterons de faire une seule remarque qui nous a frappé par l'exactitude qu'elle présente.

130. Si, dans le tableau précédent, on divise, par la somme des deux coéfficiens d'homogénéité, la force totale dépensée par le moteur et avec la même hauteur de chute, on trouvera une quantité constante dont l'erreur moyenne sera 0,0154. Cette quantité constante varie à la vérité, avec chaque hauteur de chute, mais elle est

pour la chute de 2 mètres de 5,362
de 1 mètre 3,634
de 0,5.......... 2,367

Si les hauteurs de chute croissent en progression géométrique dont la raison est 2, les constantes ci-dessus paraissent croître aussi en progression géométrique, dont la raison est $\frac{1}{2}$, et donner une exactitude aussi grande que la précédente.

131. Si la même remarque se vérifiait pour les tableaux dressés d'une manière semblable par d'autres personnes, voici comment on pourrait procéder pour obtenir les quantités différentes correspondantes à des cas non compris dans le tableau quoiqu'intermédiaires:

on chercherait d'abord par interpolation quel est le coéfficient de la quantité d'action motrice dépensée pour la chute considérée. En multipliant ensuite ce coéfficient par la somme des deux coéfficiens d'homogénéité, on obtiendrait, en totalité, la quantité d'action motrice dépensée. Le 11e. tableau ferait connaître en conséquence l'ouverture de vanne qui donnerait cette force motrice dépensée. A présent désignons par r le rayon extérieur de la roue hydraulique, par v la vitesse de la circonférence extérieure de la roue, par a la grandeur de l'ouverture de la vanne, et par m,n les deux coéfficiens d'homogénéité, et enfin par D la quantité de force motrice dépensée; nous aurons l'équation

$$mv^2+nv=D\left(V-v\frac{(r-\frac{1}{2}a)}{r}\right)v\frac{(r-\frac{1}{2}a)}{r},$$

ou

$$mv+n=D\left(V-v\frac{(r-\frac{1}{2}a)}{r}\right)\frac{r-\frac{1}{2}a}{r},$$

qui donnera la valeur de v;

$$v=\frac{2\,(DVr\,(2r-a)-2nr^2)}{(2r-a)^2\,D+4mr^2},$$

et connaissant cette quantité, la recherche des autres quantités ne présentera plus aucune difficulté et s'effectuera facilement.

NOTE PREMIÈRE.

Notre manière de considérer la résistance d'un poids s'enroulant sur un treuil, et de celle du treuil lui-même, conduit à une méthode d'évaluer le travail, assez différente de celle employée jusqu'ici par la plupart des mécaniciens.

Exposons leurs idées d'après M. Navier.

(Notes de M. Navier *sur l'architecture hydraulique de Bélidor, pag.* 377 *et suivantes.*

L'action on l'effort qu'un moteur peut exercer, doit se mesurer par l'espace qu'il parcourt dans un temps donné. C'est effectivement à cela qne se réduit l'exécution d'un travail quelconque. Il y a toujours dans l'action d'une machine, un effort exercé contre nn point, pendant qu'un espace est parcouru par ce point.

Cette remarque conduit naturellement à reconnaître que le genre de travail le plus propre à servir à l'évaluation de tous les antres, est l'*élévation verticale des corps pesans.* En effet, indépendamment de ce qu'il est susceptible, comme on le verra tout-à-l'heure, d'nne expression numérique précise, invariable et exempte d'arbitraire; on peut tonjours, quelle que soit la nature du travail exécuté par une machine donnée, non-seulement dans la pensée et par une abstraction de l'esprit, mais dans la réalité, subs-

OBSERVATIONS.

De cette manière on peut être amené à confondre nn espace parcouru d'un monvement uniformément accéléré avec un espace parcouru d'un mouvement uniforme; et à comparer un espaee parcouru d'nn mouvement varié avec un espace parcouru d'un mouvement seulement uniformément accéléré, et par conséqnent on peut être conduit à violer les lois de l'homogénéité, l'un des principes les plus importans des mathématiques. Ainsi, si l'on n'a pas égard à la nature et à l'espèce du mouvement, l'*élévation verticale des corps*

tituer à ce travail l'élévation d'un poids; car on peut supprimer la résistance, et attacher dans sa direction au point où elle agissait, une corde passant sur une poulie de renvoi, à l'extrémité de laquelle on suspendait un poids égal à l'effort ou pression que la résistance exerçait. Rien ne serait changé aux conditions de mouvement de la machine, qui resterait exactement le même, et dont l'effet serait seulement transformé en l'élévation du poids. Et pendant le temps que cette machine aurait employé à exécuter un certain ouvrage donné, un poids égal à l'effort de la résistance se trouvera élevé verticalement d'une hauteur égale à l'espace parcouru pendant ce même temps, et dans le sens de la résistance, par son point d'application. L'élévation de ce poids représentera donc le travail de la machine, et une machine sera censée faire d'autant plus d'ouvrage qu'elle pourra élever ainsi un poids plus grand à une hauteur plus grande.

La nature du travail qui devra servir de terme de comparaison à tous les autres, étant ainsi déterminée......... On reconnaît facilement que c'est la même chose d'élever un poids d'un kilogramme à deux mètres, ou un poids de deux kilogrammes à un mètre, puisqu'il faut dans les deux cas élever deux fois un kilogramme à un mètre... D'où il suit que la grandeur du travail à faire pour élever un poids est également proportionnelle au poids Q et à la hauteur q à la quelle on l'éleva, et peut par *pesans*, n'est pas susceptible d'*une expression numérique précise*, *invariable et exempte d'arbitraire*, *etc*.

En effet, quand on veut mesurer la force communiquée à un récepteur par un moteur tel que l'eau, la vapeur, nous avons vu qu'on suspend un poids au moyen d'une corde qui s'enroule sur l'arbre du récepteur; et lorsque le mouvement est devenu uniforme, en multipliant le poids par la vitesse de l'arbre à sa circonférence, on obtient la quantité d'action communiquée au récepteur. Mais en étendant ce principe comme on le fait ici, on pourrait risquer de ne pas faire la distinction du cas où il faudrait prendre la circonférence des courbes décrites par la force, et de ceux où il ne faudrait prendre qu'un de leurs diamètres, comme dans les manivelles.

On ne peut pas dire qu'une *machine fait d'autant plus d'ouvrage qu'elle peut élever un poids plus grand à une hauteur plus grande*. C'est dommage en vérité, car cela simplifierait beaucoup l'étude des machines.

Pour faire voir encore une autre inexactitude de ce passage, il faut faire attention que M. Navier comprend dans la force désignée par le mot résistance, non-seulement la quantité d'action utilisée par le travail, mais encore la force consommée par les frottemens. Or, si la première, représentée par un poids qui s'enroule au moyen d'une corde, est proportionnelle au produit du poids par la vitesse; la seconde, généralement

conséquent être représenté par leur produit Qq.

Or, comme on a nommé *quantité d'action* le produit de la pression exercée en un point par l'espace que ce point parcourt dans le sens de cette pression, on voit que le produit Qq représente précisément la quantité d'action consommée au point d'application de la résistance. Cette quantité d'action est donc véritablement la mesure du travail ou l'effet de la machine; et on voit aussi que la nature de cette espèce particulière de quantité est de présenter, en général, à l'esprit l'idée d'un certain travail exécuté, et spécialement l'idée d'un certain nombre d'unités de poids élevées à l'unité de hauteur.

Il est aisé de prévoir d'après ce qui précède, que l'action exercée par les moteurs sur les machines, pour les mettre en mouvement et les faire travailler, doit s'estimer en mécanique de la même manière et dans la même espèce d'unité que le travail effectué par les machines. En effet, le moteur agit sur la machine, comme celle-ci agit sur la résistance. Il y a toujours au point d'application du moteur, comme à celui de la résistance, pression exercée et espace parcouru. Si l'on attache au point d'application du moteur et dans le sens de son action, une corde passant sur une poulie de renvoi, et à laquelle un poids égal à la pression qu'il exerçait soit suspendu, la descente de ce poids remplacera à tous égards l'action du moteur; et cette action devra être censée d'autant produite par des organes mécaniques à mouvement circulaire, est proportionnelle au produit des poids par le carré de la vitesse.

Au reste cette dernière contradiction n'a pas été aperçue par ces messieurs, car ordinairement ils considéraient les frottemens, dans le cas d'équilibre; et dans le cas des machines en mouvement, ils se contentaient de faire la quantité d'action dépensée, pour entretenir le mouvement, proportionnelle à la simple vitesse, comme on le voit [Note *(di)* page 403 avant-dernière ligne], pour l'action dépensée par une meule pour moudre le blé. Cependant il est étonnant que les mécaniciens ne se soient pas aperçus plus tôt de cette erreur, puisque Borda dans son mémoire sur la résistance de l'air, avait trouvé que le frottement de l'axe de son appareil consommait une force proportionnelle au carré de la vitesse; mais n'ayant pas cherché à vérifier ce fait pour d'autres cas et pour d'autres machines, il l'a laissé isolé; et il a dû regarder ce résultat qui est la loi véritable comme une anomalie occasionnée sans doute par la résistance de l'air: tant il était persuadé de la bonté et de la justesse de la théorie reçue. Et cependant les vitesses des organes à mouvement circulaire, sont ordinairement trop petites, pour que la résistance de l'air puisse occasionner une perte de quantité d'action qui ne soit pas négligeable vis-à-vis de la quantité d'action totale consommée par la machine.

plus grande, qu'il faudra employer pour la remplacer ainsi un poids plus grand, et le faire descendre d'une plus grande hauteur. Mais un poids qui descend d'une certaine hauteur est capable de faire monter un poids égal, à la même hauteur dont il est descendu : donc l'action d'un moteur sur une machine pendant un temps donné, est toujours l'équivalent d'un poids, égal à l'effort qui s'exerce au point d'application du moteur, et élevé à une hauteur égale à l'espace parcouru pendant ce temps, dans le sens du moteur, par ce point d'application. Par conséquent, si dans une machine quelconque on nomme P la pression qui s'exerce au point où agit le moteur, et p l'espace parcouru par ce point dans le sens de cette pression pendant un temps donné, l'action fournie par le moteur pendant ce temps devra être exprimée numériquement par le produit Pp, qui représentera le nombre de kilogrammes élevés à un mètre.

Ceci serait peut-être exact pour un moteur qui agirait d'une manière continue et avec un mouvement uniforme, mais pour un moteur qui agit par intervalle et avec vitesse variable, ce n'est plus applicable, et l'on peut tomber dans de graves erreurs.

On voit aussi que le produit Pp représente la *quantité d'action* qui se consomme au point d'application du moteur, et c'est là le motif de la dénomination adoptée ici pour cette espèce particulière de quantité, dans laquelle on évalue les travaux faits par les machines et l'action exercée par les moteurs.

C'est encore, en d'autres termes, le même raisonnement que nous avons déjà combattu, et nous ne pouvons que reproduire les mêmes objections.

Il ne sera pas inutile, pour montrer avec quelle raison la quantité d'action consommée dans un travail est considérée comme donnant sa véritable me-

sure, de remarquer ici que c'est toujours proportionnellement à cette quantité d'action que s'établissent les prix en argent payés pour les diverses espèces de travaux. En effet quand on paye un travail, c'est véritablement le temps de l'ouvrier que l'on paye; seulement ce temps s'estime plus ou moins cher, suivant que le travail dont il s'agit exige de la part de l'ouvrier plus ou moins de vigueur, d'intelligence, ou de connaissances acquises. Or si, comme cela doit être, on conçoit un ouvrier employant ses forces d'une manière constante et réglée, il exercera constamment un même effort en agissant avec une vitesse constante, et par conséquent produira des quantités d'action qui seront égales en temps égaux. Donc le prix d'un travail étant proportionnel au temps qu'il exige, l'est aussi à la quantité d'action qui le représente. Ce rapprochement deviendra peut-être plus sensible par un exemple. Soit un homme montant de l'eau de deux puits, dont l'un est deux fois plus profond que l'autre. Il est clair, en supposant que cet homme emploie ses forces d'une manière uniforme, qu'il mettra deux fois plus de temps à monter la même quantité d'eau du premier puits que du second. Donc, si on lui payait ce travail à la tâche, il faudrait payer la même quantité d'eau deux fois plus cher quand elle est tirée du premier puits que quand elle l'est du second, et il est évident que son élévation exige aussi dans le premier cas une quantité

De ce que la méthode suivie ordinairement est vraie dans cet exemple,

d'action deux fois plus grande que dans le second.

Enfin, pour tâcher d'éclaircir cette matière antant qu'il me sera possible, et pour mettre le lecteur à même d'entendre les autres livres, j'observerai que la quantité d'action est une quantité de même ordre et de même nature que celle uommée *force vive*. On l'a même désignée quelquefois sous cette dernière dénomination, quoiqu'il soit plus généralement d'usage d'appeler force vive le produit de la masse d'un corps en mouvement par le carré de sa vitesse actuelle. Concevons eu effet une force qni a exercé un effort ou pression P, contre un point qui a parcourn un espáce p dans le sens de l'action de cette force : elle aura dépensé la qnautité d'action Pp. Mais si la même force, au lieu d'agir contre nn obstacle qui lui résiste, eût agi sur une masse M cédant librement à son action, cette masse, après avoir parcouru l'espace p aurait acquis une vitesse u et une force vive Mu^2. A présent substituant dans cette dernière valeur $M=\frac{P}{g}$ et $u^2=2gp$ elle devient égale à 2Pp, c'est-à-dire égale à deux fois la quantité d'action. Ainsi c'est la même chose ponr nne force, ou de dépenser une certaine quantité d'action sur nne machine dont elle n'accélère point le mouvement, mais qui agit sur une résistance et exécute un travail, ou d'imprimer une certaine quantité de force vive à un corps qui lui cède librement, sans qu'il y ait aucun s'ensuit-il qu'elle soit vraie dans tous les cas.

La quantité d'action d'un poids qui agit au moyen d'nne corde qui s'enroule est égale à ce poids multiplié par sa vitesse. Cependant M. Navier dans son article sur les volans, p. 389 lig. 34, pour tenir compte de la force vive developpée par le poids, divise d'abord le poids par g et multiplie le quotient par le carré de la vitesse; et en rapprochant la force

travail effectué. La quantité d'action dépensée dans le premier cas, et la force vive produite dans le second, demeurent toujours proportionnelles l'une à l'autre, et on voit que les travaux exécutés par les machines, ne font proprement que représenter les quantités de force vive qu'auraient pu faire naître les forces qui ont agi sur ces machines, si au lieu de cela elles avaient agi sur des corps qui leur eussent cédé librement. Ces rapprochemens pourront faire apprécier la justesse de ce mot connu de Mongolfier : *La force vive est celle qui se paye*.

Il faut maintenant examiner d'une manière plus particulière l'idée qu'on doit attacher au mot *résistance* employé ci-dessus. Celle qui se présente naturellement est l'obstacle au mouvement de la machine, résultant du travail qu'elle doit effectuer. Mais il est bien important d'observer qu'il n'existe aucune machine, et que l'on ne peut en concevoir aucune, dans laquelle il n'y ait plusieurs obstacles au mouvement, indépendamment de celui dont on vient de parler. En effet, la machine la plus simple de toutes est une corde par le moyen de laquelle on élèverait un poids, et l'on voit que le poids de la corde s'ajoutant à celui qu'on veut élever, oppose un obstacle en outre de celui qu'on veut faire. La machine la plus simple après celle-ci est un levier, dans lequel il faut tout au moins vaincre le frottement sur le point d'appui. Si une corde qui élève un poids passe sur une poulie de renvoi, alors en outre

vive déterminée ainsi de la quantité d'action, on trouverait que celle-là serait égale à celle-ci multipliée par $\frac{v}{g}$; ce qui est absurde puisque la force vive n'est que le double de la quantité d'action.

La justesse de ce mot dépend de la manière de calculer et d'entendre la force vive, mais de plus ce mot serait inexact pour des machines où l'action du moteur n'agirait que par intervalles et avec des vitesses variables.

du poids à élever, il faut vaincre celui de la corde, sa flexion dans la gorge de la poulie et le frottement de celle-ci sur son axe. Je crois inutile de pousser plus loin cet examen pour faire concevoir au lecteur que pour n'avoir à vaincre dans une machine que l'obstacle résultant du travail qu'on veut faire, il faudrait, ce qui est impossible, la construire avec des corps non pesans, parfaitement polis, et parfaitement élastiques, et faire mouvoir ces corps dans le vide.

Mais dans les considérations énoncées ci-dessus sur l'équilibre qui s'établit dans une machine entre les pressions exercées par le moteur et par la résistance, et sur l'égalité des quantités d'actions dépensées par l'un et consommée par l'autre; il est évident que dans la résistance on comprenait nécessairement avec les forces employées au travail effectué par la machine, celles nécessaires pour vaincre les obstacles au mouvement inhérens à la machine elle-même. Il faut donc dans toute machine concevoir la pression exercée par le moteur partagée en deux parties, dont l'une fait équilibre à la résistance proprement dite résultant du travail à effectuer, et l'autre aux résistances provenant de la machine; et la quantité d'action que le moteur dépense à son point d'application partagée aussi en deux parties dont l'une est consommée en pure perte par ces dernières résistances, et l'autre produit ce qu'on nomme ordinairement l'*effet utile* de la machine.

L'on voit encore par là l'erreur de la manière d'évaluer la force des machines, puisque l'on confond des résistances qui ne varient souvent que comme la simple vitesse avec celles qui varient comme les carrés des vitesses.

NOTE DEUXIÈME.

Aperçu historique sur la question des frottemens.

Amontons dans un mémoire, sur les moulins à feu, lu à l'académie des sciences, annonça que c'était une erreur de croire, comme on le faisait communément, que le frottement de deux corps en mouvement l'un contre l'autre fût d'autant plus grand, que les surfaces qui frottaient étaient plus grandes; il dit avoir reconnu par expérience, que le frottement n'augmentait que selon que les corps étaient plus pressés l'un contre l'autre, et chargés d'un plus grands poids. Cette nouveauté causa quelqu'étonnement à l'académie, et M. de la Hire consulta aussitôt l'expérience. Il posa sur une table de bois non polie, plusieurs morceaux de bois qui ne l'étaient pas non plus, dont les grandeurs étaient inégales, et qu'il avait chargés de telle sorte, que tous pesaient également. Il vit que pour commencer à les faire couler sur une table par le moyen d'un poids qui leur était attaché et qui passait sur une poulie, il leur fallait à tous le même poids malgré l'inégalité des surfaces qui frottaient. Il répéta la même expérience avec des marbres dressés au grès et non polis, et il obtint le même résultat qu'il démontra par le raisonnement suivant :

La résistance que deux corps qui frottent ensemble se font éprouver mutuellement, vient de ce que les parties qui hérissent leurs surfaces, doivent, si elles sont flexibles, se plier et se coucher, ou si elles sont dures, se désengrener et se dégager les unes des autres. Dans le premier cas, ce sont des ressorts qu'il faut courber, et toute la difficulté du mouvement se réduit là. Qu'un même poids doive être porté par un seul ressort ou par deux ressorts égaux chacun au premier, ce sera la même chose; car s'il en a deux à vaincre, il les courbera chacun une fois moins; et s'il n'en a qu'un, il le courbera une fois davantage. Ainsi supposé que dans les parties égales de la surface d'un corps, il y ait un nombre égal de ces parties flexibles à ressort, une autre surface qui se mouvra dessus et dont le poids sera toujours le même, n'éprouvera que la même résistance, quelle que soit son étendue; parce que si elle a à plier un plus grand nombre de ressorts, aussi les pliera-t-elle moins; mais si son poids était plus grand, il faudroit qu'elle les pliât davantage, et par conséquent elle trouverait plus de difficulté.

Dans le second cas, où il s'agit de désengrener des parties dures engagées les unes dans les autres, si ces parties dures le sont à tel point qu'elles ne puissent se briser ni s'user, du moins par leurs extrémités; il est clair que pour dé-

gager les deux surfaces, il en faut élever une, et que ce qui s'oppose à cette action, ce n'est que le poids et non la grandeur de la surface.

Mais si ces parties dures peuvent s'user par leurs pointes et se rompre en coulant les unes sur les autres, alors leur nombre fait difficulté; et comme on suppose qu'il y en a davantage dans les surfaces plus grandes, les frottemens suivront la proportion des surfaces.

M. de la Hire trouve encore un autre cas où les frottemens peuvent être dans la même proportion. On sait que si deux plaques de marbre extrêmement polies sont appliquées l'une contre l'autre, elles sont très-difficiles à séparer, parce qu'il n'y a point d'air entre elles deux qui puisse faire équilibre à le pression de l'athmosphère au dehors. Alors la plaque est d'autant plus chargée qu'elle est plus grande, parce qu'elle fournit une plus grande base à la colonne d'air qui pèse en même raison que la grandeur de sa base. M. de la Hire croit que l'huile et les graisses dont on enduit les surfaces frottantes en chasse l'air intermédiaire, et que, par conséquent, elles doivent être assimilées à ce dernier cas, et éprouver une résistance dans la raison des surfaces Son raisonnement serait juste si entre les deux surfaces il y avait des espaces vides qui ne fussent pas remplis ni par l'huile ni par la graisse.

M. Amoutons fit voir presque aussitôt l'erreur de son collègue, et prouva par ses expériences, que les matières principales qui entrent dans la composition des machines, telles que le bois, le fer, le plomb, le cuivre, éprouvent des frottemens de même grandeur, lorsque ces matières sont enduites du vieux-oingt de quelque manière qu'on les fasse varier entre elles.

Il trouva en outre que la résistance due au frottement est tout-à-fait indépendante de la grandeur des surfaces, et à peu près égale au tiers du poids, qui les presse, ou pour parler plus exactement au tiers de la force, dont elles sont pressées l'une contre l'autre; et que de plus ces résistances sont entre elles en raison composée du poids ou pressions des parties qui frottent, et des vitesses de mouvement. Telles sont les notions que l'on a eues des frottemens jusqu'en 1699.

Mussenbroek dans son cours de physique expérimentale et mathématique publié en 1729 reconnut, contre l'opinion de M. Amoutons, que le frottement n'était pas toujours le tiers de la pression, que celui du sapin, par exemple, dans le sens des fibres, était le quart de la pression lors des petites pressions; et que ce rapport diminuait de plus en plus à mesure que les pressions devenaient plus grandes, de manière qu'en définitif il se réduisait à un huitième, pour les très-fortes pressions.

Il n'est pas de l'avis des auteurs qui avaient avancé que le frottement était indépendant des surfaces frottantes ni de ceux qui le faisait croître dans le même rapport que ces surfaces, il avait été amené à cette opinion par ses expériences où

il n'avait pas cherché à distinguer la force consommée par la résistance due au frottement de celle due à l'adhésion.

Borda, dans un mémoire de l'académie des sciences, année 1763, sur la résistance de l'air, trouva que la force, consommée par le frottement de l'axe de la machine qu'il employait, croissait comme le carré de la vitesse. Mais il attribua cet effet à la résistance de l'air; et n'ayant pas fait des expériences sur d'autres axes, il ne s'aperçut pas que cet effet provenait d'une loi générale et que la théorie généralement reçue était en défaut.

Nous avons fait voir que ce principe se déduit aussi des expériences de Coulomb sur les frottemens. Ainsi que penser de Coulomb, de M. Navier et de la plupart des mécaniciens qui en se fondant sur ces dernières, se sont contentés de faire le frottement des axes et des autres corps proportionnel à la simple vitesse.

Camus, dans son traité des forces mouvantes, et Desaguliers, dans son cours de physique, s'étaient déjà aperçu que le frottement d'un corps ébranlé était moins considérable que celui d'un corps que l'on voulait sortir de l'état du repos, mais ni l'un ni l'autre ne cherchèrent à déterminer le rapport qui pouvait exister entre ces deux espèces de frottement ou mieux le rapport qui pouvait exister entre la résistance provenant de l'adhésion et celle provenant du frottement proprement dit. Bossut prévit bien la plupart de ces effets; mais Coulomb est le premier qui les ait soumis à l'expérience.

NOTE TROISIÈME.

Description et dimensions des principales pièces de la scierie de l'arsenal de Metz, soumise à nos expériences.

L'arbre de la roue hydraulique porte un rouet qui communique le mouvement à une lanterne ayant un arbre horizontal, placé parallèlement au niveau de l'arbre de la roue. L'arbre de la lanterne est armé à son extrémité d'une manivelle qui par le moyen d'une bielle communique le mouvement rectiligne et vertical de va et vient au châssis sur lequel est fixée la lame de scie. La pièce de bois à scier est portée sur un chariot qui est mis en mouvement à chaque oscilation de châssis par un pied de biche qui s'appuie sur une roue dentée à crémaillère. Chaque fois que le châssis s'élève, le pied de biche revient en arrière de quelques dents; mais quand le châssis descend, le pied de biche par son poids pousse en avant la roue dentée, qui à son tour, fait avancer le chariot et la pièce de bois à scier, contre la lame de scie.

DIMENSIONS.

Roue Hydraulique.

		Solidité.	Poids.
	Arbre de la roue hydraulique.		
0,595	Diamètre	1,7800	
6,40	Longueur		
	Deux couronnes portant les aubes.		
1,635	Rayon extérieur		
0,11	Épaisseur	0,2811	
0,13	Largeur		
	Douze montans soutenant les couronnes.		
1,55	Longueur		
0,14	Largeur	0,2864	
0,11	Épaisseur		
	Vingt-quatre faux montans pour fixer les aubes intermédiaires.		
0,37	Longueur		
0,14	Largeur	0,1220	
0,11	Épaisseur		
	Douze bandes en bois pour renforcer les jantes de la couronne.		
0,80	Longueur		
0,13	Largeur	0,0399	
0,032	Épaisseur		
	Dix-huit aubes.		
0,62	Longueur		
0,34	Largeur	0,1138	
0,03	Épaisseur		
	Couronne de rouet.		
0,9175	Rayon extérieur		
0,20	Largeur	0,2509	
0,22	Epaisseur		
	A reporter	2,8741	

		Solidité.	Poids.
	Report	2,8741	
	Quatre montans du rouet.		
0,405	Longueur		
0,26	Largeur	0,0421	
0,10	Épaisseur		
	Total des valeurs du bois de chêne . . .	2,9162	
	La pesanteur spécifique du bois de chêne étant, suivant quelques auteurs, d'environ 1, et suivant quelques autres 1,17, nous prendrons une moyenne entre ces deux déterminations, et nous adopterons 1,1 ce qui nous donnera un poids de		3207,8
	Quarante-huit dents du rouet en charme.		
	Partie saillante supérieure.		
0,08	Longueur		
0,08	Largeur		
0,06	Épaisseur		
	Partie saillante inférieure.	0,0290	21,2
0,11	Longueur		
0,05	Largeur		
0,04	Épaisseur		
	Onze cordons servant à consolider l'arbre.		
0,30	Rayon		
0,073	Largeur		195,4
0,015	Épaisseur		
	Deux tourillons de 0,072 de diamètre dont nous avons évalué le poids à		77
	Deux bandes de jantes de rouet.		
0,037	Largeur		
0,008	Épaisseur	. . . .	24,5
	Quarante boulons de jantes et de montans de rouet.		
	A reporter. . .		3525,9

		Solidité.	Poids.
	Tige. *Report.* . . .		3525,9
0,27	Longueur		
0,022	Diamètre		
	Écrou.		
0,042	Carré.	0,00622	
0,02	Épaisseur		
	Tête.		
0,042	Carré.		
0,01	Épaisseur		
	Huit brides ayant		85,8
0,06	Largeur.		
0,01	Épaisseur		
0,5	Développement		
	Seize autres.	0,0048	
0,06	Largeur.		
0,01	Épaisseur		
0,25	Développement		
	Total du poids de l'arbre de la roue hydraulique et des différentes parties qui lui sont fixées.		3611,7

Lanterne.

	Deux disques circulaires en chêne.		
0,069	Diamètre		82,30
0,11	Épaisseur		
	Deux bandages en fer enveloppant le pourtour des disques, et servant à maintenir les fuseaux sur les disques.		
0,10	Largeur.		40,93
0,012	Épaisseur		
	Quinze fuseaux en fer.		
0,48	Longueur.		143,10
0,057	Diamètre		
0,07	Diamètre du tourillon de l'arbre de la lanterne.		
	Arbre de la manivelle sans la petite coudée		82,18
	Poids total de la lanterne		348,51

			Solidité.	Poids.
	Partie de la manivelle.			
0,35	Longueur du levier de la manivelle.			
0,80	Développement de ce levier . .	} . . .		22,43
0,06	Équarrissage.			
	Tourillon de la manivelle.			
0,067	Diamètre du tourillon de la manivelle.	} . . .		4,39
	Longueur.			

Bielle de la manivelle en hêtre.

			Solidité.	Poids.
3,35	Longueur			
0,09	Équarrissage en bas	} . . .	0,0242	20,67
0,08	*Id.* en haut.			
	Deux bandeaux en fer de la bielle.			
0,90	Longueur			
0,08	Largeur.	} . . .		16,82
0,015	Épaisseur			
	Deux crapaudines de la bielle.			
0,14	Longueur.	} . . .		11,52
0,07	Équarrissage.			
	Deux petits montans de cheville.			
0,90	Longueur.	} . . .		17,17
0,035	Équarrissage.			
	Total du poids de la bielle.			66,18

Châssis de la scie.

	Fer pour maintenir la largeur du châssis.			
1,42	Longueur	} . . .	33,45	36,28
0,055	Équarrissage.			
	Deux pattes d'*id.*			
0,15	Longueur.			
0,06	Largeur.	} . . .	2,80	
0,02	Épaisseur			

		Solidité.	Poids.
	Report. . .		36,28
Deux boulons d'*id*.			
0,31	Longueur		
	Deux autres boulons.		
0,13	Longueur		3,36
	Diamètre des quatre boulons.		
0,025			
0,04	Équarri. des écrous et des têtes.		
0,02	Épaisseur des Ecrous		1,50
0,01	Épaisseur des têtes.		
Deux équerres en fer pour renforcer le châssis.			
0,67	Développement		
0,05	Largeur.		5,16
0,02	Épaisseur		
Huit boulons pour *id*.			
0,1	Longueur	6,7	9,70
0,033	Équarrissage.		
Huit écrous et têtes.			
0,040	Équarrissage.		
0,02	Épaisseur des écrous.	3,0	
0,01	Épaisseur des têtes.		
Deux bandes inférieures du châssis à l'endroit de la scie.			
	1re. bande.		
0,53	Longueur		
0,08	Largeur.		6,61
0,02	Épaisseur		
	2e. bande.		
0,23	Longueur.		
0,08	Largeur.		3,30
0,02	Épaisseur		
Deux montans de châssis en chêne.			
0,09	Largeur.		
0,07	Épaisseur		35,91
2,85	Longueur		
	A reporter. . .		101,82

			Solidité.	Poids.
		Report. . .		101,82
1re. traverse supérieure en hêtre.				
Au milieu.	0,24	Largeur		
	0,1	Épaisseur		
	1,21	Longueur	0,0348	
Aux deux extrémités.	0,18	Largeur		
	0,08	Épaisseur		
	0,2	Longueur		
2e. traverse supérieure.				
	0,127	Largeur.		58,92
	0,078	Épaisseur	0,01417	
	0,143	Longueur		
Traverse inférieure.				
	0,20	Largeur		
	0,07	Épaisseur	0,02002	
	1,43	Longueur		
Poids de la lame de scie avec les deux mâchoires en fer qui servent à la retenir				33,00
Deux boulons en fer pour maintenir les deux traverses supérieures.				
	0,035	Équarrissage.	0,001421	
	0,58	Longueur		13,70
	0,065	Équarrissage des écrous et têtes.		
	0,02	Épaisseur des écrous.	0,000334	
	0,01	Épaisseur des têtes.		
		Somme. . .		207,33

Course du châssis. 0,68

On n'a pas compris ici le poids de quelques petites pièces qui font mouvoir le chariot.

ERRATA.

Pag. 27, lig. 13, *au lieu de* la théorie de Ferdinand Berthoud, que *lisez :* la théorie que

Pag. 40, lig. 1, 2, *au lieu de* qui égale $\frac{2}{7}$, *lisez :* qu'il est $\frac{2}{5}$.

Pag. 47, lig. 5, *au lieu de* $\frac{2}{3}$, *lisez :* $\frac{1}{3}$.

Pag. 64, lig. 27. *au lieu de* mais encore pour l'empêcher, *lisez :* mais encore l'empêchent.

Pag. 80, lig. 18, *au lieu de* qui, facilité, *lisez :* qui, sollicité.

Pag. 85, lig. 10 et suiv., *au lieu de* d'après Bélidor, en comparant, etc. *lisez :* d'après Bélidor, en représentant par l'unité, le sciage de chêne vert, celui

Du chêne très-sec sera exprimé par.................... 0,67

Pag. 93, lig. 2, *au lieu de* et de celle du treuil, *lisez :* et celle du treuil.

TABLE

DES MATIÈRES.

PREMIER TABLEAU.

Pour déterminer l'accroissement de la chute de l'eau au-dessus du centre du pertuis, et tenir compte de la partie circulaire du coursier.

	OUVERTURES DE LA VANNE.	0,08.	0,29.	0,07.
	Vitesse de l'eau au sortir du pertuis........	4,473	4,248	5,098
	Vitesse de la roue v.........................	3,158	4,028	3,418
Accroissement de chute, zéro.	Rapports des vîtesses.................	0,7060	0,9482	0,6703
	Force dépensée........................	151,8	471,2	196,6
	Idem réduite...	147,9	129,2	196,0
	Idem divisée par v^2................	14,83	7,96	16,77
Accroissement de chute, 0,4.	Vitesse accrue de l'eau................	5,321	5,089	5,817
	Rapports des vîtesses.................	0,5936	0,7915	0,5876
	Force dépensée........................	253,0	872,4	205,5
	Force réduite..........................	244,1	766,0	199,2
	Idem divisée par v^2................	24,48	35,49	17,05
Accroissement de chute, 0,2.	Vitesse accrue de l'eau................	4,903	4,677	5,441
	Rapports des vitesses	0,6442	0,8612	0,6279
	Force dépensée.......................	182,3	571,2	227,0
	Force réduite..........................	167,1	271,2	212,1
	Idem divisée par v^2................	16,76	16,72	18,16

SECOND TABLEAU.

Expériences sur la roue de la petite scie se mouvant seule.

OUVERTURES de la vanne.	NOMBRE des tours.	NOMBRE des minutes écoulées.	HAUTEUR de l'eau au-dessus du fond du bassin.
0,013	44	3	1,93
0,025	56	3	1,84
0,039	60	3	1,83
0,051	63	3	1,82
0,077	66	3	1,79



TROISIÈME TABLEAU.

Expériences avec le frein sur la roue de la petite scie.

OUVERTURES de la vanne.	NOMBRE des tours.	NOMBRE des minutes.	POIDS suspendu au crochet.	HAUTEUR DE L'EAU au-dessus du fond du bassin.	
				Au commencemt.	A la fin.
			kilog.		
0,15	107	6	22	1,92	1,93
0,17	51	3	30	1,93	1,94
0,12	51	3	20	1,89	1,89
0,145	47	3	30	1,89	1,90
0,18	48	3	37	1,89	1,87
0,21	48	3	44	1,87	1,87
0,253	49	3	50	1,87	1,87
0,31	50	3	55	1,87	1,83
0,08	82	5	10	2,00	2,00
0,14	64	4	25	2,00	1,96
0,183	52	3	35	1,96	1,94
0,22	79	5	44	1,94	1,96
0,27	50	3	52	1,96	1,98

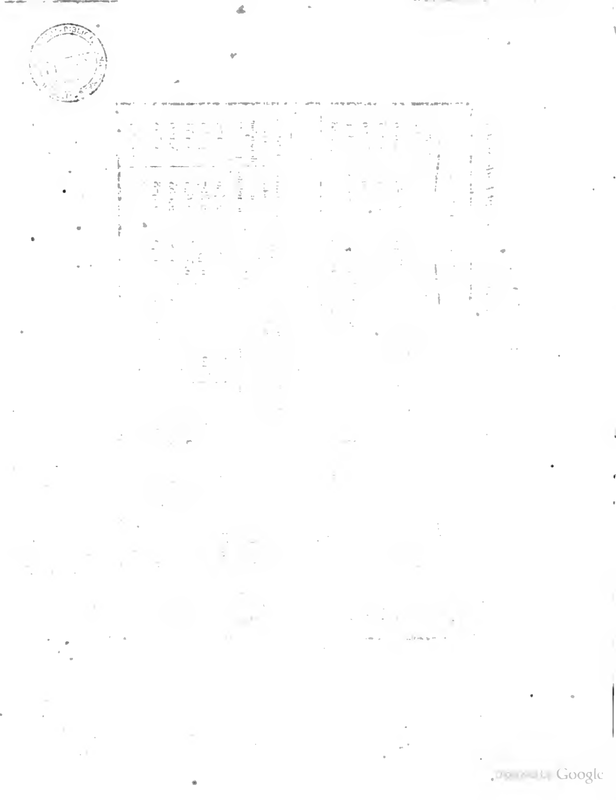
QUATRIÈME TABLEAU.

Détails des calculs faits sur les expériences avec la roue se mouvant toute seule.

OUVERTURES de la vanne.	VITESSES MOYENNES de			RAPPORTS des deux dernières vitesses.	QUANTITÉ D'ACTION			
	l'eau au sortir du pertuis.	l'eau agissant contre la roue.	la roue v.		consommée par le frottem[t].	dépensée par le moteur.	*Id.* réduite.	*Id.* divisée par v^2.
0,013	5,146	5,512	2,993	0,5430	4,056	45,12	44,79	5,000
0,025	5,035	5,411	3,797	0,7017	6,549	81,84	68,53	4,753
0,039	4,922	5,307	4,054	0,7639	7,525	120,03	86,59	5,270
0,051	4,891	5,277	4,243	0,8042	8,233	154,20	97,07	5,391
0,077	4,824	5,215	4,415	0,8466	8,975	224,30	116,55	5,978

Suite du quatrième Tableau.

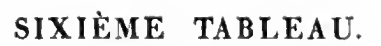
COÉFFICIENT du frottement		COÉFFICIENT total.	COÉFFICIENT déduit de la force utilisée.	QUOTIENT des deux colonnes précédentes.	COÉFFICIENT du frottement de la force motrice.	COÉFFICIENT total du frottement.	FORCE UTILISÉE conclue de celle réduite.	QUOTIENT des deux colonnes précédentes.
du poids de la roue.	de la force motrice.							
0,4528	0,0253	0,4781	2,239	4,683	0,0281	0,4809	2,490	5,179
0,4542	0,0388	0,4930	2,128	4,316	0,0431	0,4973	2,367	4,760
0,4559	0,0492	0,5051	2,360	4,672	0,0535	0,5094	2,625	5,153
0,4573	0,0553	0,5126	2,414	4,709	0,0615	0,5188	2,685	5,176
0,4603	0,0669	0,5273	2,677	5,077	0,0744	0,5348	2,978	5,568
Moyennes.				4,688				5,169



…etite scie.

OUVERTURES de la vanne.	VITESS… l'eau au sortir du pertuis.	COÉFFICIENT de la somme du frottement rapporté au centre d'action et divisé par 2g.	QUANTITÉ d'action consommée par la roue seule.	RAPPORTS des forces utilisées réduites à la force dépensée.	RAPPORTS de la force utilisée à celle dépensée.	RAPPORTS des erreurs.
0,08	5,203	0,5540	30,71	0,4964	0,5133	0,0108
0,12	4,952	0,5891	34,50	0,5377	0,5837	0,1494
0,14	5,108	0,6221	31,79	0,4587	0,4696	0,0752
0,145	4,927	0,6203	29,99	0,5185	0,5328	0,0492
0,15	4,991	0,6283	39,68	0,4716	0,5209	0,0258
0,17	5,001	0,6636	37,68	0,4709	0,4991	0,0171
0,18	4,872	0,6531	32,68	0,5079	0,5266	0,0367
0,183	5,008	0,6708	39,33	0,4900	0,5244	0,0327
0,21	4,821	0,6827	33,61	0,5045	0,5233	0,0305
0,22	4,972	0,7122	34,01	0,4407	0,4491	0,1156
0,253	4,772	0,7370	36,92	0,4838	0,5060	0,0035
0,27	4,882	0,7709	39,87	0,4349	0,4511	0,1116
0,31	4,667	0,7773	39,32	0,4599	0,4873	0,0404
Moyennes.					0,5078	0,0553





SIXIÈME TABLEAU.

Expériences sur la scierie se mouvant seule sans scier du bois.

DATES.	OUVERTURES de la vanne.	NOMBRE des tours de la roue.	NOMBRE des minutes écoulées.	HAUTEUR DE L'EAU AU-DESSUS DU FOND DU BASSIN. Au commencement	A la fin.
Septembre commencement	0,15	62	4	1,845	1,845
	0,165	69	4	1,79	1,79
	0,10	28	2	1,79	1,78
	0,14	49	3	1,78	1,77
milieu	0,055	30	3	1,63	1,61
octobre. 1er.	0,075	31	2	1,64	1,65
	0,165	39	2	1,65	1,72
5	0,08	31,5	2	1,64	1,64
	0,29	42,5	2	1,64	1,65
10	0,07	34	2	1,94	1,94


NAPOLI

du bois.

OPPOSÉE (EXPRESSION par le poids de la roue.	QUANTITÉ d'action consommée par la roue et la force motrice.	COEFFICIENT d'homogénéité de la machine seule sans la roue hydraulique.
9,207	31,4	2619
9,293	34,1	1996
9,086	21,5	2376
9,182	29,8	1971
8,980	9,9	1891
9,027	24,4	884
9,243	40,2	894
9,038	25,3	901
9,563	42,2	805
9,015	30,5	1005

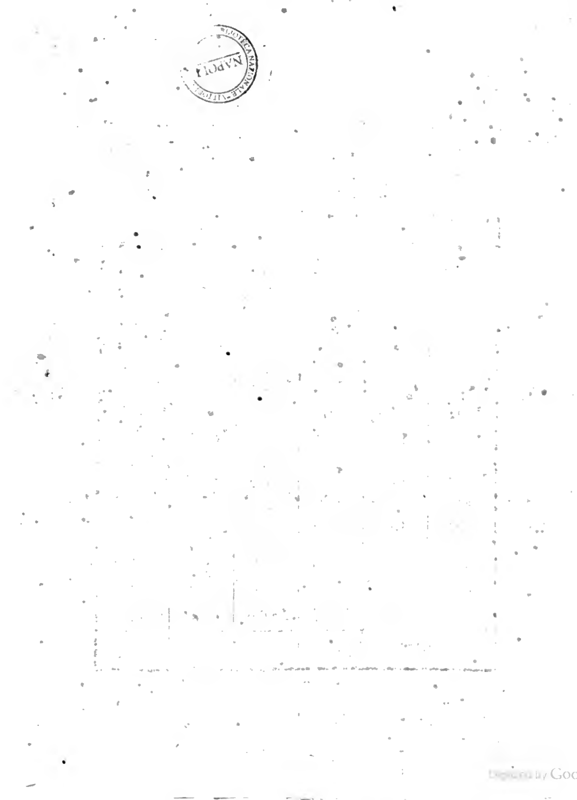


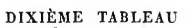
HUITIÈME TABLEAU.

Expériences sur le sciage du bois.

DATES.	OUVERTURES de la vanne.	NOMBRE des tours de la roue.	NOMBRE des minutes écoulées.	ÉPAISSEUR de l'orme.	HAUTEUR DE L'EAU au-dessus DU FOND DU BASSIN. Au commenc^t.	A la fin.
Octobre.				m.		
1er. au matin	0,17	56	3	0,32	2,000	1,972
	0,16	55	3	0,27	1,965	1,945
	0,135	47	3	0,32	1,95	1,92
	0,10	40,5	3	0,34	1,91	1,885
	0,18	54	3	0,338	1,885	1,855
1er. au soir.	0,26	55	3	0,33	1,66	1,66
	0,12	37	3	0,325	1,66	1,66
	0,085	30	3	0,325	1,66	1,63
5	0,20	31	2	0,335	1,69	1,69
	0,13	25	2	0,330	1,69	1,68
	0,38	40	2	0,31	1,68	1,65
10	0,15	32	2	0,41	1,98	1,97
	0,25	40	2	0,375	1,99	1,97
	0,11	27	2	0,33	1,97	1,96

OUVERTURES de la vanne.	FORCE précédente visée par la ase angulaire.	ÉPAISSEUR du bois.	COEFFICIENS d'homogénéité.	COEFFICIENS moyens.	RAPPORTS des erreurs.
0,17	401,7	0,32	1256		0,0368
0,16	361,6	0,27	1339		0,0268
0,135	480,3	0,32	1501	1305	0,1511
0,10	414,3	0,34	1218		0,0629
0,18	410,0	0,338	1213		0,0698
0,26	308,5	0,33	937		0,2814
0,12	431,5	0,325	1328	1182	0,0184
0,085	383,4	0,325	1180		0,0951
0,38	326,4	0,31	1053		0,1925
0,20	536,1	0,335	1600	1376	0,2323
0,13	487,2	0,34	1476		0,1319
0,25	535,2	0,375	1427		0,0943
0,15	570,4	0,41	1391	1343	0,0668
0,11	400,9	0,33	1215		0,0682
Moyen			1304		0,1090





DIXIÈME TABLEAU

Donnant par chaque vitesse de la roue, les quantités d'actions consommées par la machine et le travail.

VITESSE de l'eau.	FORCE CONSOMMÉE par la machine.	FORCE CONSOMMÉE par le travail.	FORCE TOTALE reçue par le récepteur.
mètres 1,9	36,1	38,0	74,1
2,0	40,0	40,0	80,0
2,1	44,1	42,0	86,1
2,2	48,4	44,0	92,4
2,3	52,9	46,0	98,9
2,4	57,6	48,0	105,6
2,5	62,5	50,0	112,5
2,6	67,6	52,0	119,6
2,7	72,9	54,0	126,9
2,8	78,4	56,0	134,4
2,9	84,1	58,0	142,1
3,0	90,0	60,0	150,0



ONZIÈME TABLEAU

Qui donne pour chaque ouverture de vanne, la vitesse moyenne de l'eau et la quantité d'action dépensée et celle utilisée, pour une chute de deux mètres.

OUVERTURES de la vanne.	VITESSE moyenne de l'eau.	QUANTITÉ D'ACTION dépensée.	utilisée.
0,020	6,248	116,7	70,0
0,025	6,244	145,5	87,3
0,030	6,240	174,3	104,6
0,035	6,236	202,9	121,8
0,040	6,232	231,5	138,9
0,045	6,228	259,9	156,0
0,050	6,224	288,3	173,0



DOUZIÈME TABLEAU

Montrant les différens rapports de la force utilisée par le travail, à celle consommée.

2,00^{met}. Hauteur de la chute.
0,60 Rapports de la force utilisée par le récepteur, à celle consommée par le moteur.
0,70 Base du pertuis.
0,67 Coëfficient de la contraction.
10,00 Coëfficient de la force consommée par la machine.
20,00 Coëfficient de la force consommée par le travail.

VITESSE angu-laire.	FORCE CONSOMMÉE par la machine.	par le sciage.	totale.	OUVERTURES de la vanne.	VITESSE du centre d'impression.	FORCE consommée.	RAPPORTS de la force utilisée par le travail.	RAPPORTS des vitesses.
2,0	40,0	40,0	80,0	0,02641	1,987	153,60	0,2604	0,3182
2,1	44,1	42,0	86,1	0,02774	2,082	161,26	0,2605	0,3340
2,2	48,4	44,0	92,4	0,02911	2,182	169,25	0,2600	0,3497
2,3	52,9	46,0	98,9	0,03058	2,283	177,63	0,2590	0,3658
2,4	57,6	48,0	105,6	0,03222	2,384	186,99	0,2567	0,3817
2,5	62,5	50,0	112,5	0,03381	2,452	196,09	0,2550	0,3954



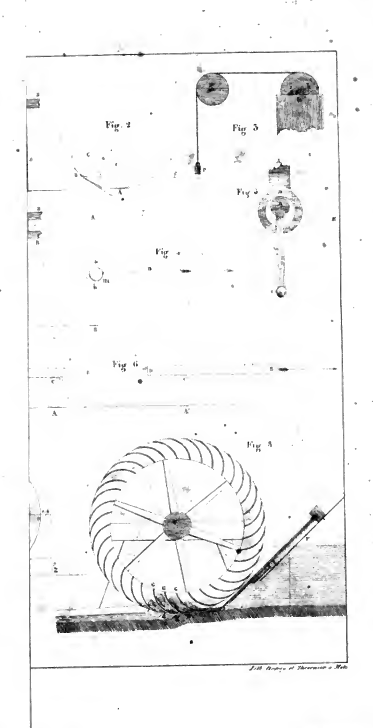
TREIZIÈME TABLEAU

Donnant les différens maximum *de la force utilisée par le travail*,

Quand la machine est mise en mouvement par une roue à aubes courbes qui utilise 60 pour cent de la force motrice, et que la base du pertuis est de 0,70 et le coéfficient de la contraction de 0,67.

CHUTE.	COEFFICIENT de la force consommée par		VITESSE de la circonf^ce. extérieur^e de la roue hydraul^e.	FORCE CONSOMMÉE			OUVERTURES de la vanne.	VITESSE du centre d'impression.	FORCE TOTALE dépensée par le moteur.	RAPPORTS de la force utilisée par le travail.	RAPPORTS des vitesses.
	la machine.	le travail.		par la machine.	par le travail.	totale.					
2,0	10	20	2,05	42,05	41	83,05	0,02708	2,035	157,43	0,2605	0,3261
		40	2,40	57,60	96	153,60	0,04701	2,370	271,52	0,3536	0,3808
		80	2,65	70,25	212	282,25	0,08508	2,594	483,50	0,4388	0,4185
		160	2,90	84,10	464	548,10	0,16725	2,777	921,54	0,5035	0,4531
		320	3,10	96,10	992	1088,10	0,35609	2,829	1818,88	0,5453	0,4728
1,0	10	20	1,65	27,25	33	60,25	0,05467	1,578	108,91	0,3032	0,3608
		80	1,95	38,05	156	194,05	0,18220	1,859	327,40	0,4762	0,4407
0,5	10	20	1,25	15,65	25	40,65	0,11383	1,214	69,70	0,3584	0,4133
		40	1,35	18,25	54	72,25	0,25928	1,260	120,56	0,4479	0,4698
2,0	5	40	2,65	35,12	106	141,12	0,04172	2,624	240,17	0,4391	0,4235
	10	80	2,65	70,25	212	282,25	0,08508	2,594	483,50	0,4388	0,4185
	40	320	2,65	281,00	848	1129,00	0,03933	2,392	1807,13	0,4336	0,4019


BIBLIOTECA
NAPOLI


Fig. 2
Fig. 3
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 8




BIBLIOTECA